

CHUYÊN ĐỀ

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Giáo Viên: Nguyễn Hoàng Văn – Trường THPT Krông Nô

1. Lý do chọn chuyên đề

Trong chương trình vật lý phổ thông, cơ học là một trong những viên gạch đầu tiên tạo nên nền móng vững chắc cho sự hình thành và phát triển của cả hệ thống kiến thức vật lý sau này. Trong số rất nhiều kiến thức của phần cơ học thì bài tập về mặt phẳng nghiêng là một dạng bài tập hay và khó, liên tục xuất hiện trong đề thi học sinh giỏi các cấp, đặc biệt, bài tập về mặt phẳng nghiêng được khai thác rất nhiều trong những năm gần đây trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và kỳ thi Olympic 30/4 khu vực phía nam. Do đó, mỗi học sinh ôn thi cho các kỳ thi học sinh giỏi cần được luyện tập nhiều về dạng bài tập này, vì vậy, giáo viên cần được trang bị những kiến thức cần thiết về phương pháp giải bài tập để hướng dẫn học sinh tiếp cận được nhiều dạng bài tập khác nhau về mặt phẳng nghiêng.

2. Tầm quan trọng của chuyên đề

Hiểu và làm được nhiều dạng bài tập khác nhau về mặt phẳng nghiêng sẽ giúp giáo viên và học sinh sớm tiếp cận và có thể giải quyết được một số câu hỏi hay trong đề thi học sinh giỏi các cấp. Từ đó, có những kỹ năng cơ bản để tiếp tục nghiên cứu các kiến thức khác của phần cơ học, đặc biệt có những kiến thức này giúp chúng ta tiếp cận tốt hơn những dạng bài tập về cơ học vật rắn.

3. Thực trạng của chuyên đề

Hiện nay, bài tập về mặt phẳng nghiêng là một phần kiến thức của một hệ thống bài tập vô cùng bao la về Cơ học nên hiện nay vẫn chưa có sách tham khảo hay tài liệu riêng biệt nói đến bài tập về mặt phẳng nghiêng, vì vậy nguồn bài tập, phương pháp giải bài tập về nội dung này để giáo viên và học sinh tham khảo cũng có những hạn chế nhất định.

Do còn nhiều hạn chế khách quan lẫn chủ quan, kinh nghiệm giảng dạy chưa nhiều nên chuyên đề chỉ khai thác một số dạng bài tập phổ biến về mặt phẳng nghiêng, chưa đi sâu với những dạng bài tập phức tạp khác.

4. Nội dung chuyên đề

Loại bài tập về mặt phẳng nghiêng không chỉ thường gặp trong tất cả các phần của cơ học mà còn có cả trong các lĩnh vực khác của vật lý. Khi một vật trượt xuống hoặc trượt lên trên một mặt phẳng nghiêng, ta sẽ gặp rất nhiều các chủ đề vật lý khác nhau, từ cơ bản, khá đơn giản, đến khó và phức tạp. Xưa nay, các tài liệu thường chỉ đề cập đến bài tập mặt phẳng nghiêng trong các bài tập về động học hay động lực học, riêng bài báo cáo này, tôi xin được đề cập chủ yếu đến các dạng bài tập “kinh điển” và quen thuộc về mặt phẳng nghiêng trong các chủ đề Động học; Động lực học; Định luật bảo toàn. Bên cạnh đó, trong chuyên đề tôi xin nói thêm một số kiểu bài tập khai thác thêm về các nội dung Từ học; Dao động cơ học.

4.1 Động học

Vấn đề đặt ra là nếu một vật bay tự do “tiếp đất” không ở mặt phẳng ngang, mà lại ở mặt phẳng nghiêng thì phải biết viết cho đúng “điều kiện rơi”

Bài toán 1: Từ một sườn núi nghiêng một góc α so với mặt phẳng ngang, người ta ném một vật với vận tốc ban đầu v_0 theo phương ngang. Hỏi vật sẽ rơi ở điểm cách chỗ ném bao xa dọc theo mặt phẳng nghiêng?

Lời Giải:

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó, sự phụ thuộc của các tọa độ của vật vào thời gian có dạng

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

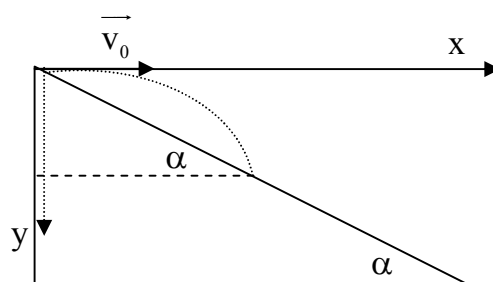
Tuy nhiên, điều kiện rơi của vật khác hoàn toàn với vật rơi tự do hay vật ném ngang mà học sinh

học trong sách giáo khoa, điều kiện giao của quỹ đạo với mặt phẳng nghiêng lại có dạng sau:

$\frac{y}{x} = \tan \alpha$. Từ đó, ta tìm được thời gian bay và khoảng cách cần tìm là

$$t = \frac{2v_0 \tan \alpha}{g}; \quad s = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{v_0 t}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g \cos \alpha}$$

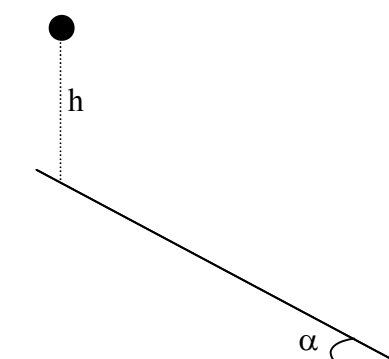
Ngoài cách giải trên, để giải bài toán này bằng cách ta sẽ chọn các trục tọa độ nghiêng ít quen thuộc đối với các cách giải bài toán động học lâu nay, nhưng lại là chuẩn đối với các bài toán động lực học. Ban đầu, chúng ta có có cảm tưởng như sự



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

mô tả chuyển động với hệ trục này phức tạp hơn; chuyển động bây giờ xảy ra với gia tốc $a_y = -g \cos \alpha$ theo phương y và gia tốc $a_x = g \sin \alpha$ theo phương x. Nhưng bù lại, thứ nhất, nó làm điều kiện rơi được viết đơn giản hơn là $y = 0$ và điều đặc biệt nhất ở đây là vận tốc mỗi khi quả cầu nảy lên là không đổi. Do đó theo trục y diễn ra những chu trình lên xuống như nhau. Để thấy rõ hơn điều đặc biệt này, ta xét bài toán như sau:

Bài toán 2: Một quả bóng rơi tự do từ độ cao h xuống một mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang. Sau khi va chạm tuyệt đối đàn hồi với mặt phẳng nghiêng, bóng lại tiếp tục nảy lên, rồi lại va chạm vào mặt phẳng nghiêng và tiếp tục nảy lên, và cứ tiếp tục như thế. Giả sử mặt phẳng nghiêng đủ dài để quá trình va chạm của vật xảy ra liên tục. Khoảng cách giữa các



điểm rơi liên tiếp kể từ lần thứ nhất đến lần thứ tư theo thứ tự lần lượt là l_1 ; l_2 và l_3 . Tìm hệ thức liên hệ giữa l_1 ; l_2 và l_3 . Áp dụng bằng số khi $h = 1 \text{ m}$ và $\alpha = 30^\circ$

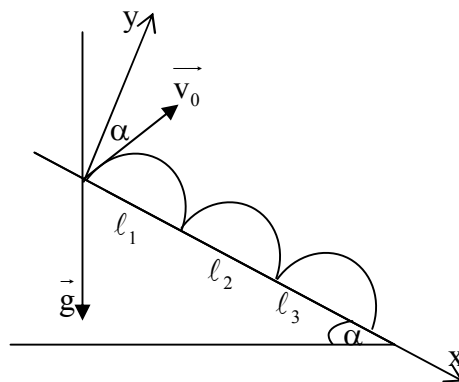
Lời Giải

Vận tốc ban đầu của quả bóng sau va chạm lần 1 với mặt phẳng nghiêng là

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ

Do va chạm của bóng và mặt phẳng nghiêng là va chạm đàn hồi nên tuân theo định luật phản xạ gương và độ lớn vận tốc được bảo toàn sau mỗi va chạm.



Véc tơ vận tốc \vec{v}_0 hợp với trục Oy một góc α

Phương trình chuyển động của quả bóng sau lần va chạm đầu tiên là

$$\begin{cases} x = v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \\ y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \end{cases}$$

Sau thời gian t_1 quả bóng va chạm với mặt phẳng nghiêng lần thứ hai tại vị trí cách điểm va chạm lần đầu một khoảng l_1 . Khi đó ta có

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$\begin{cases} \ell_1 = v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \\ 0 = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{2v_0}{g} \\ \ell_1 = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g} = 8h \sin \alpha \end{cases}$$

Sau va chạm, vật lại bật lên với vận tốc ban đầu được tính

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{0x} + a_x t = v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha t_1 = 3v_0 \sin \alpha \\ v_{1y} = v_{0y} + a_y t = -v_0 \cos \alpha + g \cos \alpha t_1 = v_0 \cos \alpha \end{cases}$$

Phương trình chuyển động của quả bóng sau lần va chạm thứ hai là

$$\begin{cases} x = 3v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \\ y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \end{cases}$$

Sau thời gian t_2 quả bóng va chạm với mặt phẳng nghiêng lần thứ ba tại vị trí cách điểm va chạm lần thứ hai một khoảng ℓ_2 . Khi đó ta có

$$\begin{cases} \ell_2 = 3v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \\ 0 = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_2 = \frac{2v_0}{g} \\ \ell_2 = \frac{8v_0^2 \sin \alpha}{g} = 16h \sin \alpha \end{cases}$$

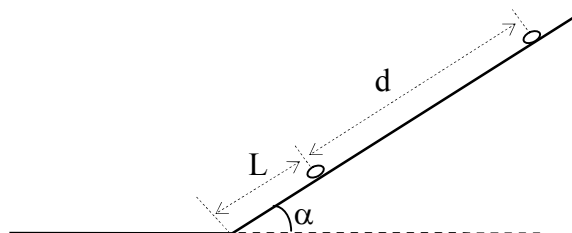
Sau va chạm, vật lại bật lên và tính tương tự ta được thời gian từ lúc va chạm đến lúc bật lên và khoảng cách từ vị trí va chạm lần thứ 3 đến vị trí va chạm lần thứ 4 lần lượt bằng

$$\begin{cases} t_3 = \frac{2v_0}{g} \\ \ell_3 = \frac{12v_0^2 \sin \alpha}{g} = 24h \sin \alpha \end{cases}$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa ℓ_1 ; ℓ_2 và ℓ_3 là: $\frac{\ell_1}{1} = \frac{\ell_2}{2} = \frac{\ell_3}{3}$

Khi $h = 1$ m và $\alpha = 30^\circ$ thì $\ell_1 = 4$ m; $\ell_2 = 8$ m và $\ell_3 = 12$ m

Bài toán 3: Hai vật nhỏ giống nhau đặt cách nhau $d = 1,6$ m trên mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng so với phương ngang là $\alpha = 30^\circ$. Vật ở dưới cách chân mặt phẳng nghiêng là $L = 90$ cm. Thả đồng thời cho hai vật trượt xuống không vận tốc đầu. Bỏ



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

qua ma sát. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a. Tìm vận tốc của mỗi vật ở chân mặt phẳng nghiêng và thời gian trượt của mỗi vật trên mặt phẳng nghiêng.

b. Sau khi đến chân mặt phẳng nghiêng thì hai vật lại trượt sang mặt phẳng ngang theo cùng một đường thẳng với tốc độ không đổi bằng tốc độ của chúng ở chân mặt phẳng nghiêng. Hỏi khoảng cách giữa các vật bằng bao nhiêu khi vật phía trên đến chân mặt phẳng nghiêng? tính khoảng cách từ vị trí hai vật gặp nhau đến chân mặt phẳng nghiêng.

Lời Giải

a. Gia tốc của hai vật trên mặt phẳng nghiêng có cùng giá trị bằng:

$$a_1 = a_2 = g \cdot \sin \alpha = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Tốc độ của hai vật khi đến chân mặt phẳng nghiêng:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2a_1 L} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 0,9} = 3 \text{ (m/s)}$$

$$v_2 = \sqrt{2a_2 s_2} = \sqrt{2a_2 (L + d)} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2,5} = 5 \text{ (m/s)}$$

Thời gian chuyển động trên mặt phẳng nghiêng của hai vật:

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ (s)}; \quad t_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{5}{5} = 1 \text{ (s)}$$

b. Khoảng cách giữa hai vật khi cùng chuyển động trên mặt phẳng ngang:

Lúc vật 2 đến chân mặt phẳng nghiêng thì vật 1 cách vật 2 một đoạn:

$$d_1 = v_1 (t_2 - t_1) = 3(1 - 0,6) = 1,2 \text{ (m)}.$$

Kể từ khi vật 2 xuống đến mặt ngang thì khoảng cách giữa hai vật giảm dần theo thời gian theo biểu thức:

$$d(t) = d_1 - (v_2 - v_1)t = 1,2 - 2t.$$

Đến thời điểm $t = 0,6 \text{ s}$ sau (kể từ khi vật 2 đến chân mặt nghiêng) thì vật 2 bắt kịp vật
Vị trí hai vật gặp nhau cách chân mặt phẳng nghiêng một đoạn bằng:

$$l = v_2 t = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ (m)}$$

Bài toán 4: Sườn đồi có thể coi như một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Từ một điểm O trên sườn đồi người ta ném một vật theo phương ngang với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 .

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

a. Gọi A là vị trí chạm đất của vật (A nằm trên sườn đồi). Tìm OA (OA = d) nếu $v_0 = 10 \text{ m/s}$ b. Gọi B là điểm ở chân dốc; OB = 15 m. Tìm v_0 để vật rơi qua đồi (rơi vào mặt đất nằm ngang)

Lời Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gốc thời gian lúc ném vật.

Phương trình chuyển động của vật

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (1)$$

a) Khi vật rơi tại A ta có:

$$\begin{cases} x = d \cdot \cos \alpha \\ y = d \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cdot \cos^2 \alpha} \approx 13,33 \text{ (m)}$

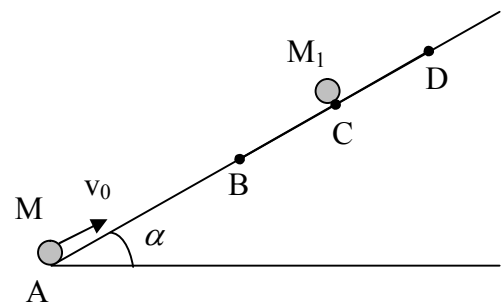
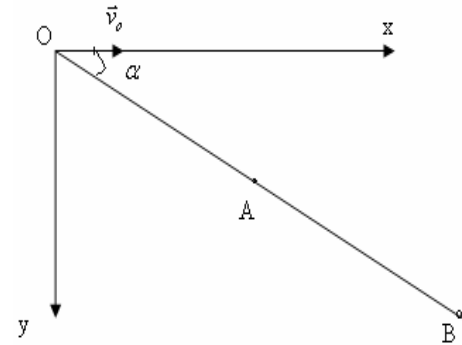
b) Để không rơi vào dốc thì: $d > 15 \text{ (m)}$.

Suy ra: $v_0 > 10,6 \text{ (m/s)}$

Bài toán 5: Một vật M (coi là chất điểm) lăn từ chân mặt phẳng nghiêng lên trên với vận tốc đầu v_0 . Bỏ qua mọi ma sát.

a. Tính độ cao cực đại mà vật đạt được theo g, v_0 .

b. Biết AB = 30 cm, D là điểm cao nhất mà M lên được nếu không có va chạm và C là chính giữa của BD. Nhưng khi M tới C nó va chạm xuyên tâm đàn hồi với M_1 cùng khối lượng với M. Sau đó M đi xuống qua B trước M_1 2 giây và qua A trước M_1 1,9 giây. Tính v_0 và gia tốc của M. (ngay trước khi va chạm M_1 đứng yên và hoàn toàn tự do).



Lời Giải

a. Độ cao cực đại mà vật đạt được: $\frac{mv_0^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

b. Do va chạm xuyên tâm đàn hồi, động năng và động lượng của hệ được bảo toàn 2 vật cùng khối lượng nên ngay sau va chạm M dừng lại và đi xuống, M_1 thu được vận tốc của M và đi lên điểm cao nhất là D.

Do bỏ qua ma sát nên 2 vật cùng chuyển động với gia tốc $a = g \cdot \sin \alpha$.

Thời gian M đi xuống qua B và A là: $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot BC}{a}}$; $t_1 = \sqrt{\frac{2(BC + AB)}{a}}$

Thời gian M_1 đi lên từ C đến D là: $t' = \sqrt{\frac{2 \cdot CD}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot BC}{a}} = t_1$

Thời gian M_1 xuống qua B và A là:

$$t_2 = t' + \sqrt{\frac{2DB}{a}} = t_1 + \sqrt{\frac{4BC}{a}}; \quad t_2 = t' + \sqrt{\frac{2(2BC + AB)}{a}}$$

Theo đề: $t_2 - t_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{4BC}{a}} = 2 \quad (1) \Rightarrow \frac{BC}{a} = 1 \Rightarrow t' = \sqrt{2} \text{ (s)}$

$$t_2 - t_1 = 1,9 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{\frac{2(2BC + AB)}{a}} - \sqrt{\frac{2(BC + AB)}{a}} = 1,9 \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) được: $BC \approx 0,49 \text{ m}$; $a \approx 0,49 \text{ m/s}^2$.

Vận tốc ban đầu:

$$v_0^2 = 2a \cdot AD = 2a(AB + 2BC) \text{ thay số ta được } v_0 \approx 1,12 \text{ m/s.}$$

Bài toán 6: Một vật có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ nằm ở B (chân mặt phẳng nghiêng BC).

Ta truyền cho vật vận tốc $v_0 = 16 \text{ m/s}$, hướng theo mặt phẳng nghiêng đi lên. Lấy $g =$

10 m/s^2 , hệ số ma sát trượt trong quá trình chuyển động không đổi $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$, góc tạo bởi

mặt phẳng nghiêng và mặt phẳng ngang $\alpha = 30^\circ$. Mặt phẳng nghiêng $BC = 20 \text{ m}$; mặt phẳng ngang AB rất dài.

a. Tìm độ cao cực đại vật đạt được so với mặt phẳng ngang trong quá trình chuyển động.

b. Tính tổng quãng đường vật đi được từ lúc truyền vận tốc đến khi dừng lại.

Lời Giải

a. Chọn chiều dương theo chiều chuyển động.

* Khi vật đi lên có gia tốc: $a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -10(0,5 + 0,3) = -8 \text{ m/s}^2$.

Quãng đường vật đi lên: $S_1 = \frac{-v_0^2}{2a_1} = 16 \text{ m}$.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Vậy dừng lại tại D rồi chuyển động đi xuống.

$$\Rightarrow h_{\max} = BD \sin \alpha = 16.0,5 = 8\text{m}.$$

b. Gọi a_2 là gia tốc lúc vật đi xuống trên mặt nghiêng.

$$a_2 = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2 \text{ m/s}^2.$$

Vật tốc tại B khi đi xuống: $v_B = \sqrt{2a_2 s_2} = 8\text{m/s}.$

Gia tốc vật trên mặt phẳng ngang: $a_3 = -\mu g = -2\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{-v_B^2}{2a_3} = 9,3 \text{ m.} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3 = 41,3\text{m}.$$

Bài toán 7: Ném một viên đá từ điểm A trên mặt phẳng nghiêng với vận tốc \vec{v}_0 hợp với mặt phẳng ngang một góc $\beta = 60^\circ$, biết $\alpha = 30^\circ$. Bỏ qua sức cản của không khí.

a. Tính khoảng cách AB từ điểm ném đến điểm viên đá rơi.

b. Tìm góc φ hợp bởi phương véc tơ vận tốc và phương ngang ngay sau viên đá chạm mặt phẳng nghiêng và bán kính quỹ đạo của viên đá tại B.

Lời Giải

a. Chọn hệ trục oxy gắn O vào điểm A và trục ox song song với phương ngang.

Trong quá trình chuyển động lực tác dụng duy nhất là trọng lực \vec{P} .

Theo định luật II Newton: $\vec{P} = m\vec{a}$

$$\text{Chiều lên: } 0x: 0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0$$

$$0y: -P = ma_y \quad a_y = -g$$

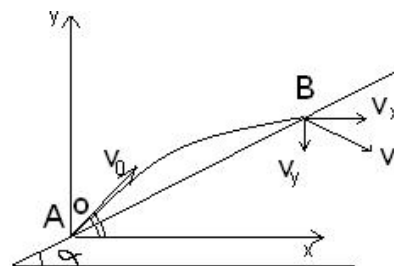
Phương trình chuyển động của vật theo hai trục ox và oy:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \beta t & (1) \\ y = v_0 \sin \beta t - \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

Khi viên đá rơi xuống mặt phẳng nghiêng:

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha & (3) \\ y = l \sin \alpha & (4) \end{cases}$$

Thế (3) vào (1) ta rút ra t thế vào (2) và đồng thời thế (4) vào (2) ta rút ra :



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$l = \frac{-2v_0^2 \cos \beta (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$l = \frac{-2v_0^2 \cos \beta \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \alpha} \Rightarrow l = \frac{2v_0^2}{3g}$$

Tại B vận tốc của vật theo phương ox là: $v_x = v_0 \cos \beta = \frac{v_0}{2}$

Khi vật chạm mặt phẳng nghiêng:

$$x = l \cos \alpha = \frac{2v_0^2}{3g} \cos \alpha$$

hay $v_0 \cos \beta t = \frac{2v_0^2}{3g} \cos \alpha$;

Suy ra thời gian chuyển động trên không của viên đá:

$$t = \frac{2v_0 \cos \alpha}{3g \cos \beta} = \frac{2v_0}{g\sqrt{3}}$$

Vận tốc theo phương oy tại B:

$$v_y = v_0 \sin \beta - gt$$

$$v_y = v_0 \sin \beta - \frac{2v_0}{\sqrt{3}} = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{\left| -\frac{v_0}{2\sqrt{3}} \right|}{\left| \frac{v_0}{2} \right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

do $v_y = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}} < 0$ nên lúc chạm mặt phẳng nghiêng \vec{v} hướng xuống.

Lực hống tâm tại B:

$$F_{ht} = mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{g \cos \varphi}$$

Với: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{v_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{12} = \frac{v_0^2}{3}$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{3\sqrt{3}.g}$$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

4.2 Động lực học

Trước hết, chúng ta xét ba bài toán khá cơ bản về mặt phẳng nghiêng, đó là bài toán liên quan đến tính toán về gia tốc, quãng đường hay vận tốc của vật tại một vị trí bất kỳ trên mặt phẳng nghiêng hoặc xác định hệ số ma sát của một bề mặt.

Bài toán 8: Một vật trượt từ trạng thái nghỉ xuống một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α so với phương ngang.

a) Nếu bỏ qua ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng thì vật trượt được 2,45 m trong giây đầu tiên. Tính góc α . Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

b) Nếu hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là 0,27 thì trong giây đầu tiên vật trượt được một đoạn đường bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình động lực học: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ms} + \vec{N}$.

Chiếu lên trục Ox, ta có: $ma = P\sin\alpha - F_{ms}$.

Chiếu lên trục Oy, ta có: $0 = N - P\cos\alpha$

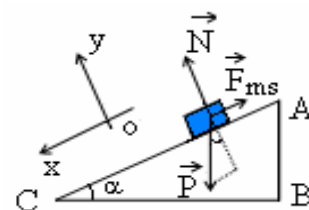
$\Rightarrow N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{ms} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

a) Nếu bỏ qua ma sát, ta có: $a = g\sin\alpha$

$$\text{Vì } s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = 4,9 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{g} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

b) Trường hợp có ma sát: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 2,6 \text{ m/s}^2$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 1,3 \text{ m}.$$



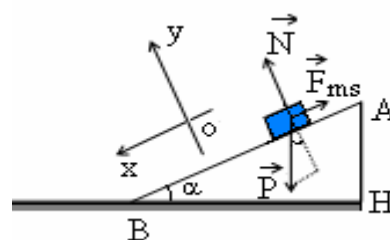
Bài toán 9: Một mặt phẳng AB nghiêng một góc 30° so với mặt phẳng ngang BC. Biết $AB = 1 \text{ m}$, $BC = 10,35 \text{ m}$, hệ số ma sát trên mặt phẳng nghiêng $\mu_1 = 0,1$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Một vật khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ trượt không có vận tốc ban đầu từ đỉnh A tới C thì dừng lại. Tính vận tốc của vật tại B và hệ số ma sát μ_2 trên mặt phẳng ngang.

Lời giải

Phương trình động lực học: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ms} + \vec{P} + \vec{N}$

Chiếu lên phương song song với mặt phẳng nghiêng (phương chuyển động), chiều dương hướng xuống (cùng chiều với chiều chuyển động), ta có: $ma_1 = P\sin\alpha - F_{ms}$.

Chiếu lên phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

(vuông góc với phương chuyển động), chiều dương hướng lên, ta có:

$$0 = N - P \cos \alpha \rightarrow N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha \Rightarrow F_{ms} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

Gia tốc trên mặt phẳng nghiêng:

$$a = \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \approx 4 \text{ m/s}^2.$$

Vận tốc của vật tại B: $v_B = \sqrt{2a_1 \cdot AB} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}.$

Gia tốc của vật trên mặt phẳng ngang: $a_2 = \frac{-v_B^2}{2BC} \approx -0,4 \text{ m/s}^2.$

Trên mặt phẳng ngang ta có: $a_2 = \frac{-\mu_2 mg}{m} = -\mu_2 g \Rightarrow \mu_2 = \frac{a_2}{g} = 0,04.$

Bài toán 10: Một vật đang chuyển động trên đường ngang với vận tốc 20 m/s thì trượt lên một cái dốc dài 100 m, cao 10 m. Biết hệ số ma sát giữa vật và mặt dốc là $\mu = 0,05$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Tìm gia tốc của vật khi lên dốc. Vật có lên được đỉnh dốc không, nếu có, tìm vận tốc của vật tại đỉnh dốc và thời gian lên dốc.

b) Nếu trước khi trượt lên dốc, vận tốc của vật chỉ là 15 m/s thì chiều dài của đoạn lên dốc bằng bao nhiêu? Tính vận tốc của vật khi nó trở lại chân dốc.

Lời giải: Phương trình động lực học: $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ms} + \vec{P} + \vec{N}$

Chiếu lên phương song song với mặt phẳng nghiêng (phương chuyển động), chọn chiều dương hướng lên (cùng chiều với chiều chuyển động), ta có:

$$ma = -P \sin \alpha - F_{ms}.$$

Chiếu lên phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng

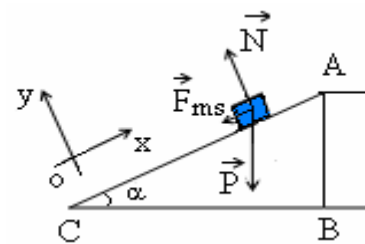
(vuông góc với phương chuyển động), chiều dương hướng lên, ta có:

$$0 = N - P \cos \alpha \Rightarrow N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha \Rightarrow F_{ms} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

a) Gia tốc của vật khi lên dốc:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \\ &= -g\left(\frac{h}{s} + \mu \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}\right) \approx -1,5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Quãng đường đi cho đến lúc dừng lại ($v = 0$): $s' = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 133 \text{ m}.$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Vì $s' > s$ nên vật có thể lên được đến đỉnh dốc.

Vận tốc của vật khi lên tới đỉnh dốc: $v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = 10 \text{ m/s}$.

b) Nếu vận tốc ban đầu là 15 m/s thì: $s' = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 75 \text{ m}$.

Gia tốc của vật khi xuống dốc: $a' = g\left(\frac{h}{s} - \mu \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}\right) = 0,5 \text{ m/s}^2$.

Vận tốc của vật khi xuống lại chân dốc: $v' = \sqrt{2a's'} = 8,7 \text{ m/s}$.

Một trong những bài tập khá hay về mặt phẳng nghiêng là tìm điều kiện về lực tác dụng, về góc của mặt phẳng nghiêng... để thỏa mãn một điều kiện đặc biệt nào đó. Những bài toán tiếp theo sau đây, đề cập đến vấn đề đó.

Bài toán 11: Vật m được kéo đều trên mặt phẳng nghiêng góc α lực kéo \vec{F} hợp với mặt phẳng một góc β , hệ số ma sát là μ . Giá trị nhỏ nhất của F là bao nhiêu để thực hiện được việc này. Lúc đó β bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Chọn hệ trục như hình vẽ.

Các lực tác dụng vào vật: $\vec{F}_{ms}, \vec{p}, \vec{N}, \vec{F}$

Theo định luật II Newton: $\vec{F} + \vec{F}_{ms} + \vec{p} + \vec{N} = \vec{0}$

Chiếu lên Ox : $F \cos \beta - F_{ms} - mg \sin \alpha = 0$

Chiếu lên Oy :

$$F \sin \beta - mg \cos \alpha + N = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F \sin \beta$$

$$F_{ms} = \mu \cdot N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta)$$

$$\Rightarrow F \cos \beta - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) - mg \sin \alpha = 0$$

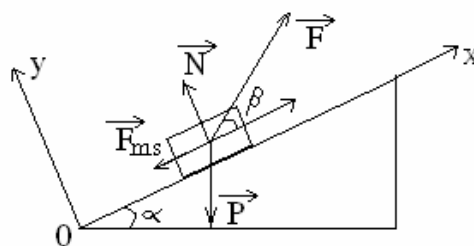
$$\Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\mu \sin \beta + \cos \beta}$$

Để lực F nhỏ nhất thì $\mu \sin \beta + \cos \beta$ lớn nhất.

$$\text{Đặt: } \mu \sin \beta + \cos \beta = m \Rightarrow \mu \sin \beta + \cos \beta - m = 0$$

Đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin \beta$ và $\cos \beta$. Điều kiện có nghiệm của phương trình:

$$\mu^2 + 1 \geq m^2 \Rightarrow m \leq \sqrt{\mu^2 + 1}$$



Vậy:

$$F_{\min} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Để tìm β ta giải phương trình: $\mu \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{\mu^2 + 1}$

$$\sin(\beta + \varphi) = 1 \Rightarrow \beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

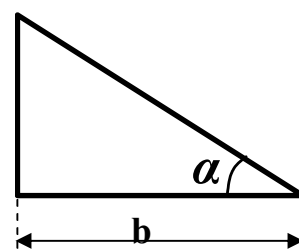
$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{với} \quad \cos \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Ta có: $\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi = \mu$

Vậy: $\beta = \arctan \mu$.

Ở bài toán này, để tìm điều kiện cho lực cực đại, người ta thường dùng bất đẳng thức để biến đổi, tuy nhiên, để giải riêng cho bài này cũng như rất nhiều bài toán liên quan đến sự cực trị chúng ta có thể ứng dụng đạo hàm để giải, bài toán sau đây tôi sẽ giải bằng ứng dụng đạo hàm.

Bài toán 12: Một vật nhỏ A bắt đầu trượt từ đỉnh của một mặt phẳng nghiêng đáy là b như hình vẽ sau. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ_t . Tìm giá trị góc α của mặt phẳng nghiêng để thời gian vật đi xuống là nhỏ nhất.



Lời Giải

Vật chịu tác dụng của: Trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{N} , lực ma sát trượt \vec{F}_{ms}

Áp dụng định luật II Newton ta có: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ms}$ (*)

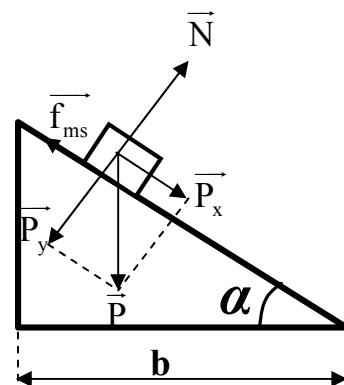
Chiếu phương trình (*) lên hệ trục Oxy đã chọn ta được:

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - \mu_t \cdot N \\ N = mg \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu_t \cos \alpha) \quad (1)$$

Quãng đường vật đi được sau thời gian t là:

$$S = \frac{1}{2} at^2 \quad (S \text{ là độ dài mặt phẳng nghiêng})$$

Mặt khác, từ hình vẽ ta được:



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$S = \frac{b}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t^2 = \frac{2b}{a \cos \alpha} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$t^2 = \frac{2b}{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \mu_t \cos^2 \alpha)g}$$

$$\text{Đặt } M = (\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \mu_t \cos^2 \alpha). \text{ Khi đó } t^2 = \frac{2b}{M \cdot g}$$

Để thời gian là cực tiểu thì M đạt cực đại (vì b, g không đổi), khi đó, theo ý nghĩa của đạo hàm thì M cực đại khi đạo hàm bậc nhất của M theo ẩn số α phải bằng 0.

$$\text{Khi đó: } M'(\alpha) = \cos 2\alpha + \mu_t \sin 2\alpha = 0 \leftrightarrow \cos 2\alpha + \mu_t \sin 2\alpha = 0$$

$$\leftrightarrow \cos 2\alpha = -\mu_t \sin 2\alpha \rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{1}{\mu_t} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left[\arctan \left(-\frac{1}{\mu_t} \right) \right]$$

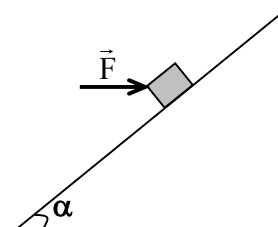
Những bài toán tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu về một vấn đề cũng khá hay về mặt phẳng nghiêng, đó là tìm điều kiện để một vật trượt lên hay trượt xuống mặt phẳng nghiêng hoặc tính toán độ lớn nhỏ nhất hay lớn nhất của lực tác dụng vào vật đặt trên mặt phẳng nghiêng.

Bài toán 13: Một vật có trọng lượng $P = 100 \text{ N}$ được giữ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng góc α bằng lực F có phương nằm ngang. Biết $\tan \alpha = 0,5$ và hệ số ma sát trượt $\mu = 0,2$.

Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a. Tính giá trị lực F lớn nhất.

b. Tính giá trị lực F nhỏ nhất



Lời giải:

a) Lực F có giá trị lớn nhất khi vật có xu hướng đi lên.

Khi đó các lực tác dụng lên vật như hình vẽ.

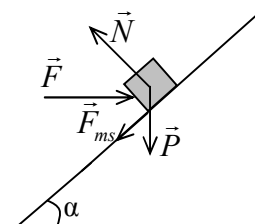
$$\text{Do vật cân bằng nên } \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{ms} + \vec{P} = \vec{0}$$

Chiếu lên phương mặt phẳng nghiêng và phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng ta

$$F_{ms} = F \cos \alpha - P \sin \alpha$$

$$N = F \sin \alpha + P \cos \alpha$$

được: Do $F_{ms} \leq \mu N \Rightarrow F \leq \frac{P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = \frac{P(\tan \alpha + \mu)}{1 - \mu \tan \alpha}$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$\Rightarrow F_{\max} = \frac{P(\tan \alpha + \mu)}{1 - \mu \tan \alpha}$$

Thay số ta được: $F_{\max} \approx 77,8\text{N}$

b) Lực F có giá trị nhỏ nhất khi vật có xu hướng đi xuống.

Khi đó lực ma sát đổi chiều so với hình vẽ.

$$\text{Do vật cân bằng nên } \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{ms}} + \vec{P} = \vec{0}$$

Chiếu lên phương mặt phẳng nghiêng và phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng ta được:

$$F_{\text{ms}} = -F \cos \alpha + P \sin \alpha$$

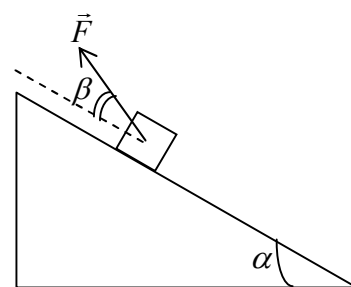
$$N = F \sin \alpha + P \cos \alpha$$

$$\text{Do: } F_{\text{ms}} \leq \mu N \Rightarrow F \geq \frac{P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{P(\tan \alpha - \mu)}{1 + \mu \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow F_{\min} = \frac{P(\tan \alpha - \mu)}{1 + \mu \tan \alpha}$$

Thay số ta được: $F_{\max} \approx 27,27\text{N}$

Bài toán 14: Vật khối lượng m được kéo đi lên trên mặt phẳng nghiêng với lực \vec{F} , \vec{F} hợp với mặt phẳng nghiêng góc β . Mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ .



a) Tìm biểu thức tính F khi vật đi lên đều theo mặt phẳng nghiêng.

b) Với $m = 5\text{ kg}$, $\alpha = 45^\circ$; $\mu = 0,5$; lấy $g = 10\text{ m/s}^2$. Xét vật đi lên đều, tìm β để F nhỏ nhất, tìm giá trị lực F nhỏ nhất đó.

Lời giải

a. Các lực tác dụng lên vật như hình vẽ.

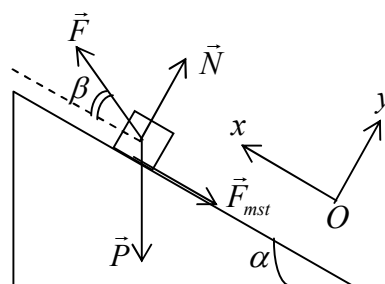
Vật chuyển động đều nên:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{mst}} + \vec{N} = \vec{0} \quad (*)$$

$$\text{Chiếu } (*) \text{ lên: Ox: } F \cos \beta - P \sin \alpha - F_{\text{mst}} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Oy: } F \sin \beta + N - P \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Thay $F_{\text{mst}} = \mu N = \mu(P \cos \alpha - F \sin \beta)$ vào (2) ta được:



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$F = P \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$$

Vì $P = mg$, μ và α xác định nên $F = F_{\min}$ khi mẫu số $M = \cos \beta + \mu \sin \beta$ cực đại.

Theo bất đẳng thức Bunhacôpxki:

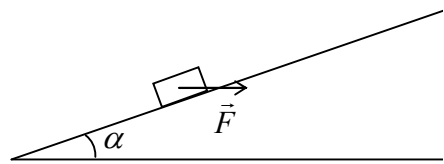
$$\cos \beta + \mu \sin \beta \leq \sqrt{(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)(1 + \mu^2)} = \sqrt{1 + \mu^2}$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \tan \beta = \mu = 0,5 \Leftrightarrow \beta = 26,56^\circ$.

$$\text{Vậy khi } \beta = 26,56^\circ \text{ thì } F = F_{\min} = P \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}} = 47,43 \text{ N}$$

Bài toán 15: Một vật có trọng lượng $P = 100 \text{ N}$ được giữ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang bằng một lực

\vec{F} có phương ngang như hình vẽ bên. Biết $\tan \alpha = 0,5$; hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là $\mu = 0,2$. Xác định điều kiện về F để:



- Vật có xu hướng đi lên.
- Vật có xu hướng đi xuống.

Lời giải:

- Vật có xu hướng đi lên:

Các lực tác dụng vào vật: $\vec{N}, \vec{F}, \vec{F}_{ms}, \vec{P}$

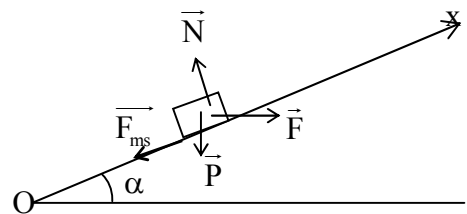
Để vật nằm yên và có xu hướng đi lên thì: $P \sin \alpha < F \cos \alpha \leq P \sin \alpha + F_{ms}$

với $F_{ms} = \mu N = \mu(F \cdot \sin \alpha + P \cos \alpha)$

$$\Rightarrow P \tan \alpha < F \leq \frac{P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = \frac{P(\tan \alpha + \mu)}{1 - \mu \tan \alpha}$$

$$\text{Thay số ta được: } 100 \cdot 0,5 < F \leq \frac{100(0,5 + 0,2)}{1 - 0,2 \cdot 0,5}$$

$$\Leftrightarrow 50 \text{ N} < F \leq \frac{700}{9} \text{ N} \approx 77,8 \text{ N}$$



- Vật có xu hướng đi xuống

Hình vẽ tương tự như trường hợp vật có xu hướng đi lên, nhưng lực ma sát đổi chiều.

Để vật nằm yên và có xu hướng đi xuống thì:

$$P \sin \alpha - F_{ms} \leq F \cos \alpha \leq P \sin \alpha$$

với $F_{ms} = \mu N = \mu(F \cdot \sin \alpha + P \cos \alpha)$

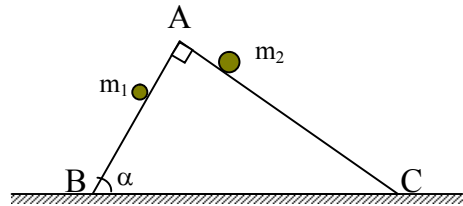
XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$\Rightarrow \frac{P(\tan \alpha - \mu)}{1 + \mu \tan \alpha} \leq F \leq P \tan \alpha$$

$$\text{Thay số ta được: } \frac{100(0,5 - 0,2)}{1 + 0,2 \cdot 0,5} \leq F \leq 50 \Leftrightarrow 27,3\text{N} \approx \frac{300}{11}\text{N} \leq F \leq 50\text{N}$$

Bây giờ, chúng ta sẽ xét những bài toán mặt phẳng nghiêng đặc biệt, khi vật đặt trên mặt nệm chuyển động thì nệm cũng trượt theo, đây là dạng bài toán khá phổ biến trong các đề thi chính thức của các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp.

Bài toán 16: Một nệm có tiết diện là tam giác ABC vuông tại A, và hai mặt bên là AB và AC. Cho hai vật m_1 và m_2 chuyển động đồng thời không vận tốc đầu từ A trên hai mặt nệm. Bỏ qua mọi ma sát. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Giữ nệm cố định, thời gian hai vật m_1 và m_2 trượt đến các chân mặt nệm AB và AC tương ứng là t_1 và t_2 với $t_2 = 2t_1$. Tìm α .
- Để $t_1 = t_2$ thì cần phải cho nệm chuyển động theo phương ngang một gia tốc a_0 không đổi bằng bao nhiêu?

Lời Giải

- Gia tốc của các vật trên mặt phẳng nghiêng: $a_1 = g \sin \alpha$; $a_2 = g \cos \alpha$

$$AB = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \quad \text{và} \quad AC = \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}$$

$$t_2 = 2t_1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{4}{\tan \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \tan \alpha = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63,4^\circ.$$

- Để $t_1 = t_2$ thì nệm phải chuyển động về phía bên trái nhanh nhanh dần đều

Trong hệ quy chiếu gắn với nệm thì

$$a_{1n} = g \sin \alpha - a_0 \cos \alpha$$

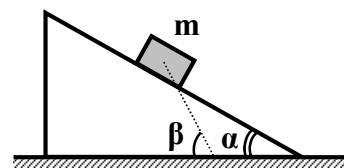
$$a_{2n} = g \cos \alpha + a_0 \sin \alpha$$

$$\text{Vì } t_1 = t_2 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{a_{2n}}{a_{1n}} = \frac{g \cos \alpha + a_0 \sin \alpha}{g \sin \alpha - a_0 \cos \alpha} = 2$$

$$\text{Thay số ta được } a_0 = \frac{3}{4}g = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Bài toán 17: Trên mặt phẳng ngang nhẵn có một chiếc nêm với góc nêm α . Vật nhỏ khối lượng m trượt xuống với gia tốc có hướng hợp với mặt phẳng ngang góc β , gia tốc trọng trường g . Xác định khối lượng của nêm và gia tốc trong chuyển động tương đối của vật đối với nêm. Bỏ qua mọi ma sát.



Lời giải:

- Xét chuyển động của vật trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất.

+) Các lực tác dụng lên vật như hình vẽ.

+) Gọi \vec{a} : gia tốc của vật đối với nêm

\vec{a}_0 : gia tốc của nêm đối với đất

- Phương trình ĐLH viết cho vật:

$$-N \sin \alpha = m(a_0 - a \cos \alpha) \quad (1)$$

$$N \cos \alpha - mg = -ma \sin \alpha \quad (2)$$

- Phương trình ĐLH viết cho nêm:

$$Q \sin \alpha = Ma_0 ; Q = N \quad (3)$$

+) Giải hệ:

Từ (1) và (3) có:

$$-Ma_0 = m(a_0 - a \cos \alpha) \quad (4)$$

Từ (2) và (3) có:

$$Ma_0 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = m(g - a \sin \alpha) \quad (5)$$

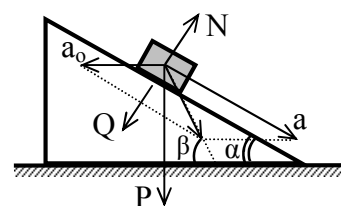
- Sử dụng định lý hàm số sin trong tam giác gia tốc ta có:

$$\frac{a_0}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \beta)} \Rightarrow \frac{a}{a_0} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (6)$$

- Từ (4) $\Rightarrow \frac{a}{a_0} = \frac{m + M}{m \cos \alpha}$ thay vào (6)

- Tìm được : $M = m \frac{\tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$

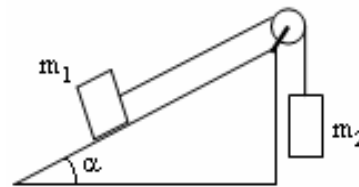
- Từ (4), (5) và (6) tìm được: $a = g \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta - \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha}$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Trong rất nhiều dạng bài tập động lực học, thì bài tập mặt phẳng nghiêng liên kết với ròng rọc là dạng bài tập rất quen thuộc đối với đa số giáo viên và học sinh, sau đây, chúng ta xét các bài toán liên kết giữa ròng rọc và mặt phẳng nghiêng đặc trưng nhất.

Bài toán 18: Cho cơ hệ như hình vẽ. Biết $m_1 = 500 \text{ g}$, $m_2 = 600 \text{ g}$, $\alpha = 30^\circ$, hệ số ma sát trượt giữa vật m_1 và mặt phẳng nghiêng là $\mu = 0,2$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Bỏ qua ma sát và khối lượng của ròng rọc, dây nối. Tính gia tốc chuyển động của mỗi vật và sức căng của sợi dây.



Lời giải: Phương trình động lực học của các vật:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{F}_{ms} + \vec{N} + \vec{T}_1.$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2.$$

Vì dây không giãn và khối lượng dây không đáng kể nên:

$$a_1 = a_2 = a; T_1 = T_2 = T$$

Vì $P_2 > P_1 \sin \alpha$ nên vật m_2 chuyển động xuống, m_1 chuyển động lên theo mặt phẳng nghiêng.

Với vật m_1 chiếu lên các trục Ox và Oy, với vật m_2 chiếu lên phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, ta có:

$$m_1 a = T - P_1 \sin \alpha - F_{ms} \quad (1)$$

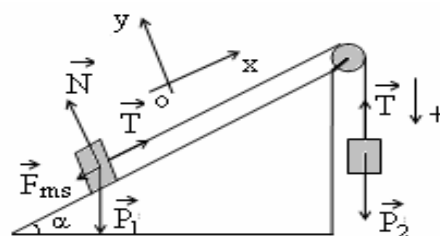
$$0 = N - P \cos \alpha \Rightarrow N = P_1 \cos \alpha = m_1 g \cos \alpha \Rightarrow F_{ms} = \mu m_1 g \cos \alpha \quad (2)$$

$$m_2 a = P_2 - T = m_2 g - T \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha}{m_1 + m_2} = 2,4 \text{ m/s}^2.$$

Thay a vào (3) ta có: $T = m_2 g - m_2 a = 4,56 \text{ N}$.

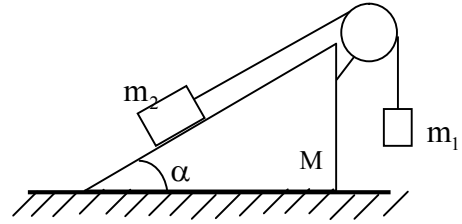
Bài toán chúng ta vừa xét rất cơ bản khi chỉ xét đến chuyển động của các vật còn nênm cố định, bài toán sau đây chúng ta đề cập đến chuyển động phức tạp hơn khi xét đến chuyển động của nênm. Với bài toán này, ngoài việc áp dụng các định luật Newton cho các vật nặng, ta còn xét đến quá trình chuyển động của nênm, số lượng phương trình nhiều hơn và tính toán phức tạp hơn, đây cũng là dạng bài tập thường được chọn ra trong các kỳ thi học sinh giỏi ở cấp khu vực hoặc cấp quốc gia.



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Bài toán 19: Cho cơ hệ như hình vẽ. Biết $\alpha = 30^\circ$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $M = 2 \text{ kg}$, ma sát giữa m_2 và M là không đáng kể. Bỏ qua khối lượng dây nối và ròng rọc, dây không giãn, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- M đứng yên. Tìm gia tốc của các vật m_1 và m_2 , độ lớn lực căng dây và áp lực của dây lên ròng rọc.
- Tìm điều kiện của hệ số ma sát giữa M và mặt bàn nằm ngang để M không bị trượt trên bàn.



Lời Giải

a. Khi M đứng yên

Chọn chiều dương là chiều chuyển động

Đối với m_1 có các lực tác dụng: \vec{P}_1 ; \vec{T}_1

Đối với m_2 có các lực tác dụng: \vec{P}_2 ; \vec{T}_2

Viết biểu thức định luật II Newton cho mỗi

vật và chiếu lên chiều chuyển động ta được các phương trình sau:

$$P_1 - T_1 = m_1 a_1$$

$$T_2 - P_2 \sin \alpha = m_2 a_2$$

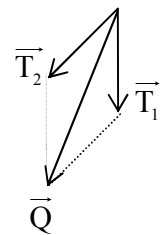
Do dây không giãn nên: $a_1 = a_2 = a$; $T_1 = T_2 = T$

$$a_1 = a_2 = a_1 = a_2 = \frac{P_1 - P_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$T = P_1 - m_1 a = 18 \text{ N}$$

Áp lực tác dụng lên trục của ròng rọc:

$$\vec{Q} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$



$$\text{Độ lớn: } Q = 2T \cdot \cos 30^\circ = 18\sqrt{3} \text{ N}$$

b. Các lực tác dụng vào vật M :

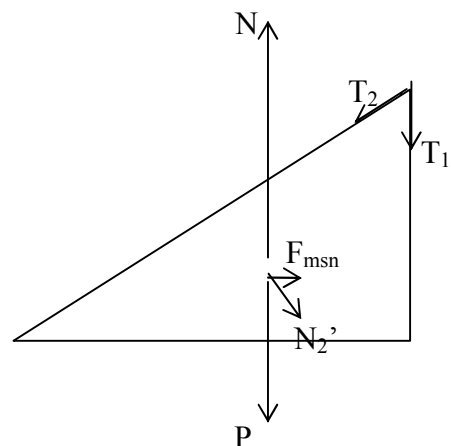
$$\vec{P}, \vec{N}, \vec{P}', \vec{P}'', \vec{N}_2', \vec{F}_{ms}$$

$$N_2' = P_2 \cos \alpha = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_{msn} = T_{2x} - N_{2x} = 4\sqrt{3} \text{ N}$$

$$N = P + T_1 + T_{2y} + N_{2y}'$$

$$= P + T_1 + T_2 \sin \alpha + N_{2x}' \cos \alpha = 62 \text{ N}$$



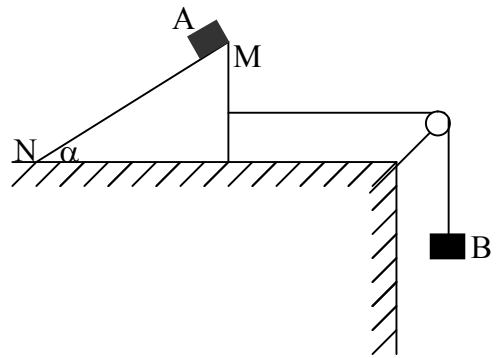
XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Để M không bị trượt trên bàn thì ma sát giữa M và bàn là ma sát nghỉ: $F_{msn} \leq \mu N$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{F_{msn}}{N} = 0,11 \mu$$

Bài toán tiếp theo chúng ta xét là một bài toán khá phức tạp, đó là sự liên kết giữa mặt phẳng nghiêng với ròng rọc và trên mặt phẳng nghiêng có một vật khác đang chuyển động.

Bài toán 20: Một nêm có khối lượng $M = 200$ gam, có mặt MN dài $l = 80$ cm và nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$, được đặt trên một mặt bàn nhẵn và được nối với vật B có khối lượng $m_B = 500$ gam bằng một sợi dây mảnh, không giãn vắt qua một ròng rọc cố định có khối lượng không đáng kể. Ban đầu giữ vật B đứng yên. Đặt tại đỉnh M của nêm một vật A có khối lượng $m_A = 100$ gam rồi buông cả hai vật A và B để chúng chuyển động.



Tim thời gian vật A trượt đến mặt bàn và quãng đường mà vật B đi được trong thời gian đó; Tính lực căng dây nối. Bỏ qua mọi ma sát. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$

Lời Giải:

Chọn hệ trục tọa độ có gốc O gắn với mặt bàn, trục Oy hướng thẳng đứng lên trên.

Gọi \vec{N}_1 là phản lực vuông góc của mặt nêm tác dụng lên vật A.

Gọi \vec{a}_1 ; \vec{a}_2 ; \vec{a}_3 lần lượt là gia tốc của vật A, nêm và vật B so với mặt bàn. Khi đó $a_2 = a_3$

- Áp dụng định luật II Newton cho vật A ta được :

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

Chiều lên các trục tọa độ ta được

$$\text{Chiều lên Ox: } N_1 \sin \alpha = m_1 a_{1x} \Rightarrow a_{1x} = 5N_1 \quad (1)$$

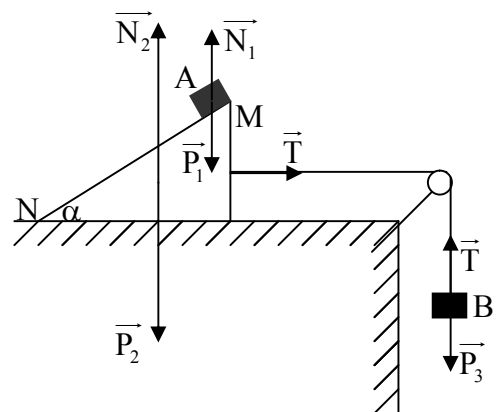
$$\text{Chiều lên Oy: } N_1 \cos \alpha - P_1 = m_1 a_{1y} \Rightarrow a_{1y} = 10 - 5\sqrt{3} N_1 \quad (2)$$

- Áp dụng định luật II Newton cho nêm:

$$\vec{P}_2 + \vec{N}'_1 + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}_2 \quad (N'_1 = N_1)$$

Chiều lên hệ trục ta được

$$T + N_1 \sin \alpha = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = 2,5T + 1,25N_1 \quad (3)$$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

- Áp dụng định luật II Newton cho vật B

$$\vec{P}_3 + \vec{T} = m_3 \vec{a}_3$$

Chiều lên hệ trục ta có: $T - P_3 = m_3 a_3 \Rightarrow a_3 = 10 - 2T$ (4)

Gia tốc của vật A đối với nêm: $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$

$$\begin{cases} a_x = a_{1x} + a_2 = 2,5T + 6,25N_1 \\ a_y = a_{1y} = 10 - 5\sqrt{3}N_1 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } \tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} \quad (6)$$

Giải hệ gồm các phương trình trên ta được

$$N_1 = 0,572 \text{ N}; T = 2,06 \text{ N}; a_{1x} = 2,885 \text{ m/s}^2; a_{1y} = 5,004 \text{ m/s}^2.$$

$$a_1 = 5,412 \text{ m/s}^2; a = 10,08 \text{ m/s}^2; a_3 = 5,88 \text{ m/s}^2$$

Thời gian để vật A trượt hết mặt bàn là: $t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = 0,4\text{s}$

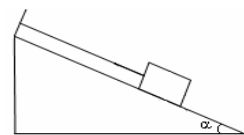
$$\text{Quãng đường vật B đi được } s = \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0,47\text{m}$$

4.3 Tĩnh học

Bài toán tĩnh học cơ bản nhất về mặt phẳng nghiêng đó là bài toán một vật nằm cân bằng trên đó và đề bài thường yêu cầu tính toán về điều kiện tạo ra sự cân bằng đó.

Bài toán sau đây là bài toán đơn giản như vậy.

Bài toán 21: Một vật có khối lượng $m = 2 \text{ kg}$ được giữ yên trên một mặt phẳng nghiêng bởi một sợi dây song song với đường dốc chính. Biết góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ và ma sát không đáng kể. Xác định lực căng của sợi dây và phản lực của mặt phẳng nghiêng lên vật.



Lời Giải

Vật chịu tác dụng của các lực: Trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{N} và

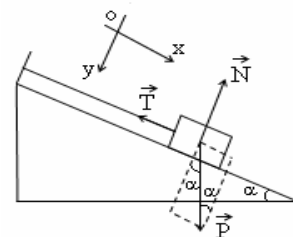
sức căng \vec{T} của sợi dây.

Điều kiện cân bằng: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$.

Chiều lên trục Ox, ta có: $P \sin \alpha - T = 0$

$$\Rightarrow T = P \sin \alpha = m g \sin \alpha = 9,8 \text{ N}.$$

Chiều lên trục Oy, ta có: $P \cos \alpha - N = 0 \Rightarrow N = P \cos \alpha = m g \cos \alpha = 17 \text{ N}.$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Trong thực tế, khi các phương tiện giao thông chuyển động trên đoạn đường của những khu vực có địa hình hiểm trở, khó khăn, người ta thường tính toán, khối lượng hàng hóa chất trên xe, chiều dài của xe... để đảm bảo an toàn giao thông. Để hiểu hơn về vấn đề này, ta xét một bài toán sau.

Bài toán 22: Một kiện hàng hình hộp đồng chất, có khối tâm ở tâm hình hộp, được thả trượt trên mặt phẳng nghiêng nhờ hai gối nhỏ A và B. Chiều cao của hình hộp gấp n lần chiều dài ($h = nl$). Mặt phẳng nghiêng một góc α , hệ số ma sát giữa gối A và B là μ .

- Hãy tính lực ma sát tại mỗi gối.
- Với giá trị nào của n để kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật.

Lời Giải:

a. Xét các lực tác dụng vào kiện hàng: $\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_{msA}, \vec{F}_{msB}$.

Theo định luật II Newton: $\vec{P} + \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{F}_{msA} + \vec{F}_{msB} = m\vec{a}$

Chiều lên oy: $P \cos \alpha - (N_A + N_B) = 0 \Rightarrow N_A + N_B = mg \cos \alpha$ (1)

Chọn khối tâm G của kiện hàng làm tâm quay, vật chuyển động tịnh tiến không quay nên từ đó ta có:

$$N_B \frac{l}{2} = N_A \frac{l}{2} + F_{msA} \frac{h}{2} + F_{msB} \frac{h}{2}$$
$$\Rightarrow N_B - N_A = \frac{F_{msA} + F_{msB}}{l} \cdot h = \frac{\mu h}{l} \cdot (N_A + N_B)$$

Cuối cùng:

$$N_B - N_A = \frac{\mu m g h \cos \alpha}{l} = \mu m g \cos \alpha$$
 (2)

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được:

$$N_A = \frac{1}{2} m g \cos \alpha (1 - \mu n)$$

$$N_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha (1 + \mu n)$$

Lực ma sát tại mỗi gối:

$$\begin{cases} F_{msA} = \mu N_A = \frac{1}{2} \mu m g \cos \alpha (1 - \mu n) \\ F_{msB} = \mu N_B = \frac{1}{2} \mu m g \cos \alpha (1 + \mu n) \end{cases}$$

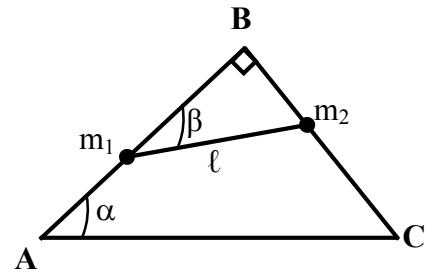
XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

b. Kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật khi : $N_A \geq 0$

$$\text{Hay: } 1 - \mu m \geq 0 \Rightarrow n \leq \frac{1}{\mu}.$$

Trong sự cân bằng của một vật, một trong những vấn đề được nhắc đến đó là cân bằng của vật trong trạng thái đó là bền hay không bền, để biết được cân bằng của vật là bền hay không bền ta thường dựa vào thế năng của vật hoặc các lực tác dụng vào vật, gây ra chuyển động cho vật, bài toán sau đây, sẽ xác định trạng thái cân bằng bền hay không bền bằng phương pháp tọa độ khối tâm.

Bài toán 23: Một khung thép nhẹ, cứng kim loại có dạng tam giác vuông ABC với góc nhọn $\hat{A} = \alpha$; cạnh AB = a được đặt trong mặt phẳng thẳng đứng, cạnh huyền nằm ngang. Trên hai cạnh góc vuông có xuyên hai viên bi thép nhỏ (coi là chất điểm) khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 . Chúng được nối với nhau bằng thanh nhẹ, có chiều dài ℓ ($\ell < AC$)



thanh nhẹ có thể trượt không ma sát trên hai cạnh góc vuông. Ban đầu thả hệ hai viên bi và thanh nhẹ từ đỉnh góc vuông B. Khi thanh nhẹ nối hai vật hợp với cạnh AB một góc β thì hệ vật đạt trạng thái cân bằng bền. Tìm hệ thức liên hệ giữa m_1 , m_2 , α và β .

Lời Giải:

Khối tâm của hệ gồm hai viên bi và thanh nối là

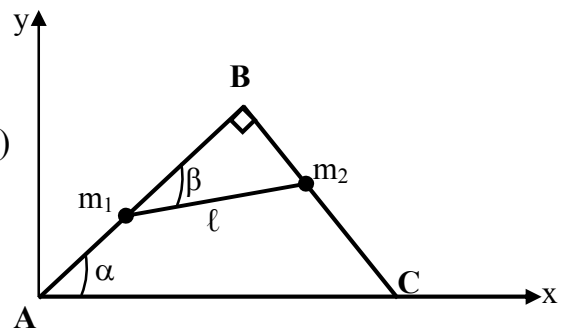
$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Với

$$\begin{cases} y_1 = (a - \ell \cos \beta) \sin \alpha \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \ell \sin(\alpha - \beta) + y_1 = a \sin \alpha - \ell \sin \beta \cos \alpha \quad (3) \end{cases}$$

Thay (2) và (3) vào (1) và biến đổi ta được:



$$y_G = a \sin \alpha - \frac{m_2 \ell \cos \alpha}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} \tan \alpha \cos \beta + \sin \beta \right)$$

Xét biểu thức $x = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha \cos \beta + \sin \beta = b \cos \beta + \sin \beta$. Với $b = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(b \cos \beta + \sin \beta)^2 \leq (b^2 + 1)(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = (b^2 + 1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \frac{\cos \beta}{b} = \sin \beta \rightarrow \cot \beta = b = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$$

Ta thấy khi $\cot \beta = b$ thì biểu thức x đạt giá trị lớn nhất, khi đó y_G đạt giá trị nhỏ nhất, hay khối tâm ở vị trí thấp nhất, do đó hệ ở trạng thái cân bằng bền.

$$\text{Vậy, hệ ở trạng thái cân bằng bền khi: } \cot \beta = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét những bài toán liên quan đến vật rắn chuyển động trên mặt phẳng nghiêng, đây là dạng bài tập đặc biệt quan trọng đối với kiến thức cơ học cần được bồi dưỡng cho đội tuyển thi HSG Quốc gia.

Bài toán 24: Từ mức cao nhất của một mặt phẳng nghiêng, một hình trụ đặc và một quả cầu đặc có cùng khối lượng và bán kính, đồng thời bắt đầu lăn không trượt xuống dưới. Tìm tỷ số các vận tốc của hai vật tại một mức ngang nào đó.

Lời giải

Gọi v_c là vận tốc của quả cầu sau khi lăn xuống được độ cao h.

v_T là vận tốc của hình trụ sau khi lăn xuống được độ cao h.

Khi quả cầu, hình trụ lăn không trượt xuống dưới, thì điểm đặt của lực ma sát tĩnh nằm trên trục quay tức thời, mà tại đó vận tốc của các điểm tại bằng không và không ảnh hưởng tới cơ năng toàn phần của vật.

Vai trò của lực ma sát ở đây là đảm bảo cho vật lăn thuần túy không trượt và đảm bảo cho độ giảm thế năng hoàn toàn chuyển thành độ tăng động năng tịnh tiến và chuyển động năng quay của vật.

Vì các lực tác dụng lên hình trụ đặc và quả cầu đều là : \vec{p} (lực thế), \vec{N} (theo phương pháp tuyến) và lực ma sát tĩnh \vec{F}_{ms} . Ta có \vec{N} và \vec{F}_{ms} không sinh công

$$\Rightarrow A_{\text{các lực không thế}} = 0 \Rightarrow \text{cơ năng của hệ được bảo toàn.}$$

Như vậy ta có thể áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho chuyển động của quả cầu và hình trụ:

$$\text{Với quả cầu: } mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega_c^2}{2} \quad (1)$$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Với hình trụ:
$$mgh = \frac{mv_T^2}{2} + \frac{I_T \omega_T^2}{2} \quad (2)$$

Trong đó:
$$I_c = \frac{2mR^2}{5} ; \quad \omega_c = \frac{v_c}{R}$$

$$I_T = \frac{mR^2}{2} ; \quad \omega_T = \frac{v_T}{R}$$

Thay vào (1) và (2) ta có:
$$mgh = \frac{7mv_c^2}{10} ; \quad mgh = \frac{3mv_T^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{v_c^2}{v_T^2} = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{v_c}{v_T} = \sqrt{\frac{15}{14}}$$

Bài toán 25: Một hình trụ đồng chất khối tâm C, bán kính R, momen quán tính $I = \frac{1}{2}mR^2$ đối với trục của nó. Được đặt không vận tốc đầu trên mặt phẳng nghiêng góc α . Gọi f là hệ số ma sát trượt giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng.

α . Gọi f là hệ số ma sát trượt giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng.

1) Xác định gia tốc hình trụ. Chứng tỏ rằng có trượt hay không là tùy theo giả thiết của α so với giả thiết α_0 nào đó cần xác định.

2) Tìm sự biến thiên động năng giữa các thời điểm t, 0. Xét hai trường hợp $\alpha < \alpha_0$ và $\alpha > \alpha_0$

Lời Giải

1) Xác định gia tốc hình trụ

Giả sử trụ lăn không trượt:

$$P \sin \alpha - F_{ms} = ma$$

$$F_{ms} \cdot R = I \gamma = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R}$$

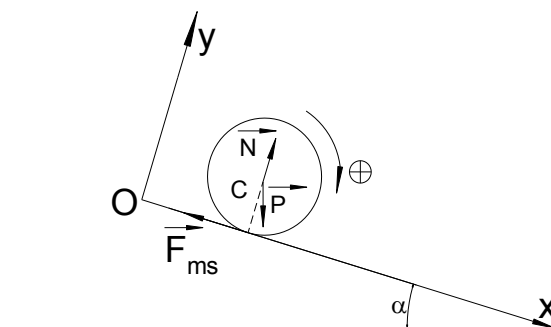
Suy ra: $F_{ms} = \frac{1}{2} ma ; a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

Điều kiện: $F_{ms} = \frac{2}{3} mg \sin \alpha \leq fmg \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha \leq 3f$

Tức là $\alpha \leq \alpha_0$ với $\tan \alpha_0 = 3f$ thì trụ lăn không trượt.

Trường hợp $\alpha > \alpha_0$ F_{ms} là ma sát trượt. Ta có: $F_{ms} = fmg \cos \alpha$.

$$\begin{cases} a_2 = \frac{mg \sin \alpha - F_{ms}}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \\ \gamma = \frac{F_{ms} \cdot R}{I} = \frac{2fg}{R} \cos \alpha \end{cases}$$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

2) Sự biến thiên động năng.

Trường hợp $\alpha < \alpha_0$ ở thời điểm t:
$$\begin{cases} v = at = \frac{2}{3}g \sin \alpha \cdot t \\ \omega = \gamma \cdot t = \frac{2}{3R}g \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

Động năng: $E_d = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ Bảo toàn năng lượng $\Delta E = 0$

- Trường hợp $\alpha > \alpha_0$ ở thời điểm t:

$$\begin{cases} v = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot t \\ \omega = \frac{2fg \cos \alpha}{R} t \end{cases}$$

Biến thiên năng lượng:

$$\Delta E = A_{ms} = F_{ms} \left(\frac{a_2 t^2}{2} - S_q \right) = fmg \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} g (\sin \alpha - 3f \cos \alpha) t^2$$

$$\text{Với } S_q = \frac{1}{2}(\omega t)R$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} mg^2 f (\cos \alpha \sin \alpha - 3 \cos^2 \alpha) t^2$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad \text{Với } S_2 \text{ là độ dịch của C, } S_1 \text{ là quãng đường trụ quay.}$$

Bài toán 26: Một lăng trụ lục giác đều cạnh a, khối lượng m phân bố đều. Mômen quán tính của lăng trụ là $I = \frac{5}{12}ma^2$ các mặt của lăng trụ hơi lõm để khi lăn trên mặt phẳng nghiêng lăng trụ tiếp xúc mặt phẳng nghiêng bằng các cạnh coi là vật rắn. Gọi ω_1, ω_2 lần lượt là vận tốc góc của lăng trụ ngay trước và sau va chạm. Tìm tỉ số $\frac{\omega_2}{\alpha_1}$

biết ma sát đủ lớn để khối trụ lăn nhưng không nảy lên.

Lời Giải

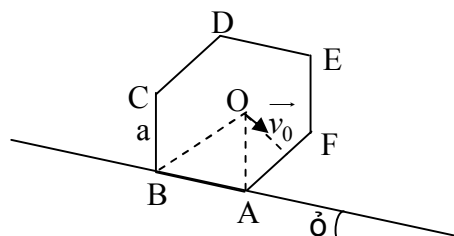
Ngay trước va chạm lăng trụ quay với ω_1 , mômen động lượng đối với trục quay O là :

$$L_0 = I\omega_1 = \frac{5}{12}ma^2\omega_1; \vec{v}_0 \perp OB \text{ do trước va chạm,}$$

lăng trụ quay quanh B

Đối với trục quay A: Ngay trước va chạm :

$$L_A = L_0 + a \cdot mv_0 \sin 30^\circ = \frac{5}{12}ma^2 \cdot \omega_1 + \frac{mav_0}{2}$$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$L_A = \frac{5}{12}ma^2\omega_1 + \frac{1}{2}ma^2\omega_1 = \frac{11}{12}ma^2\omega_1 \quad (1)$$

Ngay sau va chạm lăng trụ quay quanh A với ω_2 , đối với (A):

$$L'_A = I_A \cdot \omega = \left(\frac{5}{12}ma^2 + ma^2\right) \cdot \omega_2 = \frac{17}{12}ma^2\omega_2 \quad (2)$$

Mômen động lượng bảo toàn vì coi như có phản lực N (va chạm) và F_{ms} qua trục quay, suy ra mômen bằng 0 (mômen của vector \vec{p} trong thời gian rất nhỏ ta bỏ qua)

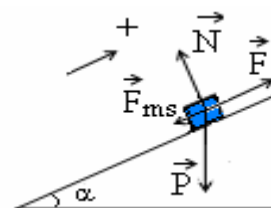
$$L_A = L'_A \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{11}{17}$$

4.4 Các định luật bảo toàn

Bài toán 27: Một vật có khối lượng $m = 3 \text{ kg}$ được kéo lên trên mặt phẳng nghiêng một góc 30° so với phương ngang bởi một lực không đổi $F = 70 \text{ N}$ dọc theo đường dốc chính. Biết hệ số ma sát là $0,05$. lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Hãy xác định các lực tác dụng lên vật và công do từng lực thực hiện khi vật di chuyển được một quãng đường $s = 2 \text{ m}$.

Lời Giải:

Vật chịu tác dụng của các lực: Lực kéo \vec{F} , trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{N} của mặt phẳng nghiêng và lực ma sát \vec{F}_{ms} .



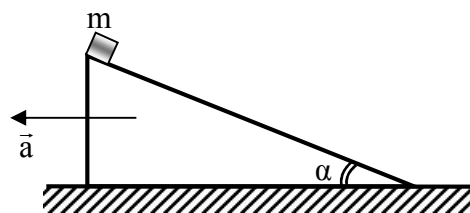
Vì $P\sin\alpha = 15 \text{ N} < F = 70 \text{ N}$ nên vật chuyển động lên theo mặt phẳng nghiêng (được mặc nhiên chọn là chiều dương).

Công của từng lực: $A_F = F \cdot s \cdot \cos 0^\circ = 140 \text{ J}$;

$$A_P = mg\cos 120^\circ = -30 \text{ J}; A_N = N\cos 90^\circ = 0;$$

$$A_{ms} = F_{ms} \cdot s \cdot \cos 180^\circ = \mu mg \cdot \cos\alpha \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -2,6 \text{ J}.$$

Bài toán 28: Một vật nhỏ có khối lượng m trượt không vận tốc ban đầu từ đỉnh một nêm có góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Hệ số ma sát giữa vật với mặt nêm là $\mu = 0,2$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Mốc thế năng tại chân mặt phẳng nghiêng.



a) Nêm được giữ cố định. Khi vật đến chân nêm thì có bao nhiêu phần trăm cơ năng của vật chuyển hóa thành nhiệt năng?

b) Nêm được kéo cho trượt sang trái với gia tốc không đổi $a = 2 \text{ m/s}^2$ trên sàn nằm ngang. Tìm gia tốc của m so với nêm khi nó được thả cho chuyển động.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Lời Giải

a) Lực ma sát: $F_{ms} = \mu.N = \mu mg.\cos\alpha$.

Công của lực ma sát: $A_{ms} = F_{ms}.l$ với l là chiều dài nêm.

Cơ năng ban đầu của vật: $W = mgh = mgl.\sin\alpha$.

$$\frac{A_{ms}}{W} = \frac{\mu}{\tan\alpha} = 34,6\%$$

b) Các lực tác dụng vào vật m như hình vẽ

Phương trình định luật II cho vật:

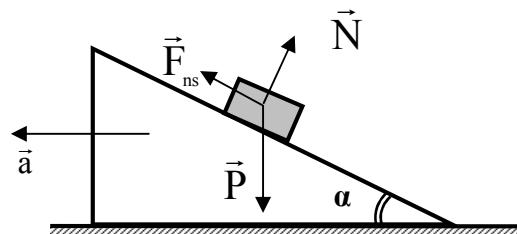
$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ms} = m(\vec{a}_{12} + \vec{a}).$$

Chiếu lên phương vuông góc với nêm và song song với nêm ta được:

$$N + ma.\sin\alpha - mg.\cos\alpha = 0$$

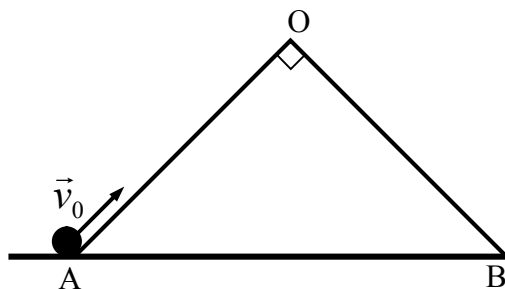
$$mg.\sin\alpha + ma.\cos\alpha - F_{ms} = m.a_{12}.$$

$$a_{12} = g.\sin\alpha + a.\cos\alpha - \mu(g.\cos\alpha - a.\sin\alpha) = 5,2 \text{ m/s}^2$$



Bài toán 29 (Trích Đề Olympic 30/4 năm

2009): Một quả cầu nhỏ nằm ở chân nêm AOB vuông cân, cố định cạnh l như hình vẽ bên. Cần truyền cho quả cầu vận tốc \vec{v}_0 bằng bao nhiêu hướng dọc mặt nêm để quả cầu rơi đúng điểm B trên nêm. Bỏ qua mọi ma sát, coi mọi va chạm tuyệt đối đàn hồi.



Lời Giải

Chọn mốc thế năng ở mặt phẳng chứa AB

Gọi v là vận tốc của quả cầu khi lên đến đỉnh nêm

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

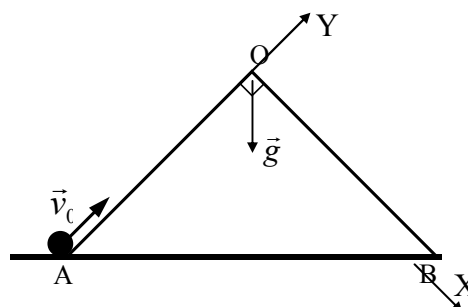
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = mg \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - gl\sqrt{2}}$$

Sau khi rời O, quả cầu chuyển động

như vật ném xiên với v tạo với phương

ngang một góc 45° .

+ Theo trục Oy:



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

$$a_y = -\frac{g\sqrt{2}}{2} = \text{const}; v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2}t; y = vt - \frac{g\sqrt{2}}{4}gt^2$$

$$\text{Khi chạm B: } y = 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2}v}{g}$$

$$\text{Vận tốc quả cầu ngay trước va chạm: } v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}v}{g} = -v$$

Do va chạm đàn hồi, nên sau va chạm vận tốc quả cầu dọc theo Oy là \bar{v} nên bi lại chuyển động như trên.

Khoảng thời gian giữa hai lần va chạm liên tiếp giữa bi và mặt nêm OB là:

$$t = \frac{2\sqrt{2}v}{g}$$

+ Theo trục Ox:

$$a_x = \frac{g\sqrt{2}}{2} = \text{const}; v_{0x} = 0: \text{ quả cầu chuyển động nhanh dần đều}$$

Quãng đường đi được dọc theo Ox sau các va chạm liên tiếp:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n-1)$$

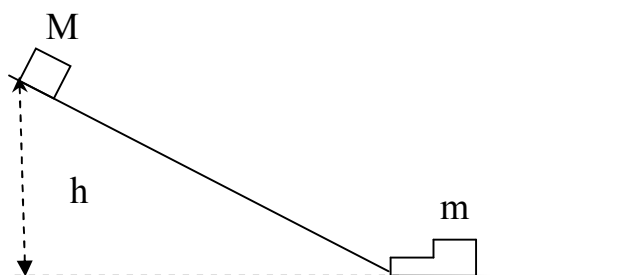
$$x_1 = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - g\ell\sqrt{2})}{g}$$

Để quả cầu rơi đúng điểm B:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)]x_1 = n^2 x_1 = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - g\ell\sqrt{2})}{g} n^2 = l$$

Bài toán 30: Một khúc gỗ bắt đầu trượt trên mặt phẳng nghiêng như hình vẽ. $M = 0,5 \text{ kg}$ từ độ cao $h = 0,8 \text{ m}$ không ma sát đập vào khúc gỗ trên mặt bàn ngang $m = 0,3 \text{ kg}$. Hỏi khúc gỗ dịch chuyển trên mặt bàn mặt bàn ngang một đoạn bao nhiêu? Biết va chạm hoàn toàn mềm. Hệ số ma sát trên mặt ngang $\mu = 0,5$.



Lời Giải

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ cô lập gồm M và m:

$$M\vec{v}_0 = (M + m)\vec{V}$$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Vận tốc va chạm của hai vật ngay sau va chạm :

$$\Rightarrow V = \frac{Mv_0}{M+m} = \frac{M\sqrt{2gh}}{M+m} \quad (1)$$

Vì va chạm mềm nên sau va chạm coi hai vật là một có $M+m$:

Các lực tác dụng lên hai vật : \vec{N} , \vec{P}_{M+m} , \vec{F}_{ms}

Theo định luật II Niu Tơn :

$$\vec{N} + \vec{P}_{M+m} + \vec{F}_{ms} = (M+m) \vec{a} \quad (*)$$

Chiếu (*) lên phương chuyển động :

$$\text{Ta có : } F_{ms} = - (M+m)a$$

$$\text{mặt khác : } F_{ms} = \mu(M+m)g \Rightarrow a = - \mu g.$$

Từ công thức chuyển động: $v_t^2 - v_0^2 = 2as$ Trong đó: $v_t = V$, $v_0 = 0$

\Rightarrow Khúc gỗ dịch chuyển 1 đoạn :

$$S = \frac{0^2 - V^2}{2 \cdot (-\mu g)} = \frac{V^2}{2\mu g} = \left(\frac{M\sqrt{2gh}}{M+m} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\mu g} = 0,625 \text{ (m)}$$

Trong những bài tập về mặt phẳng nghiêng, việc vận dụng các định luật bảo toàn để giải thường được áp dụng trong một số bài toán phức tạp, điển hình là bài toán va chạm của một vật với mặt nghiêng theo những cách va chạm khác nhau. Dạng bài tập này được sử dụng trong đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2012. Sau đây, chúng ta sẽ xét một bài toán va chạm tương tự trong trường hợp đơn giản nhất.

Bài toán 31: Một nêm A có góc $\alpha = 30^\circ$, có khối lượng M đặt trên mặt ngang. Một viên bi khối lượng m đang bay ngang với vận tốc \vec{V}_0 ở độ cao a so với mặt ngang, đến va chạm vào mặt nghiêng của nêm.

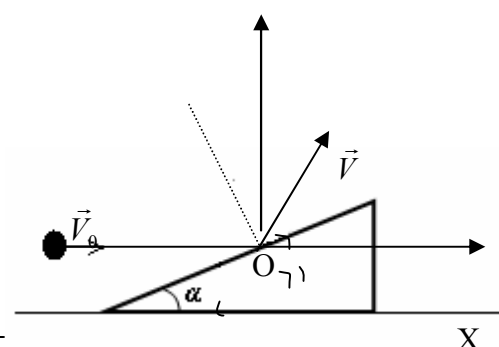
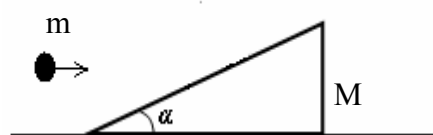
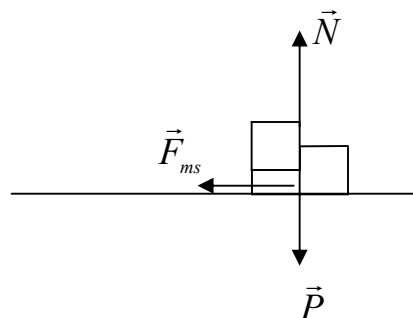
Va chạm của bi vào nêm tuân theo định luật phản xạ gương và vận tốc của bi sau va chạm có độ lớn $\frac{7V_0}{9}$, hệ số ma sát giữa nêm và bàn là K. Hỏi sau va chạm bi lên đến

độ cao tối đa bao nhiêu (so với mặt bàn) và nêm dịch chuyển một đoạn là bao nhiêu ?

Lời Giải:

Chọn hệ trục OXY như hình , O là điểm va chạm.

$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$ là vận tốc của bi ngay sau va chạm



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

\vec{V}_A là vận tốc của nêi ngay sau va chạm.

Động lượng bi-nêi được bảo toàn theo phương ngang nên :

$$mV_x + MV_A = mV_0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{mV_0}{M} \left(1 - \frac{7}{9} \cos 2\alpha \right) = \frac{11mV_0}{18M}.$$

Độ cao tối đa bi lên được kể từ O :

$$h_{\max} = \frac{V_y^2}{2g} = \frac{\left(\frac{7V_0}{9} \sin 2\alpha \right)^2}{2g} = \frac{49V_0^2}{216g}$$

$$\text{Độ cao tối đa tính từ mặt bàn: } H_{\max} = \frac{49V_0^2}{216g} + a$$

$$\text{Gia tốc trượt chậm dần đều của nêi: } a = \frac{-F_{ms}}{M} = -Kg$$

$$\text{Nêi trượt được một đoạn: } S = \frac{-V_A^2}{2a} = \frac{-\left(\frac{11mV_0}{18M} \right)^2}{-2Kg} = \frac{121mV_0^2}{648M^2Kg}$$

4.5 Từ Học

Biết làm đúng với mặt phẳng nghiêng sẽ giúp ích rất nhiều cho việc giải các bài tập rất phong phú về sự chuyển động của thanh trượt theo các đường ray nghiêng.

Bài toán 32: Một khung kim loại đặt nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc α sao cho $\sin \alpha = 0,8$ và được đặt trong một từ trường đều có phương thẳng đứng. Một thanh trượt có khối lượng $m = 20$ gam trượt theo khung. Biết độ dài thanh trượt là $l = 10$ cm, điện trở của thanh là $R = 1,2 \Omega$; cảm ứng từ $B = 0,1$ T; hệ số ma sát giữa thanh trượt và khung là $\mu = 0,5$. Tìm vận tốc đã ổn định của thanh trượt. Bỏ qua điện trở của khung.

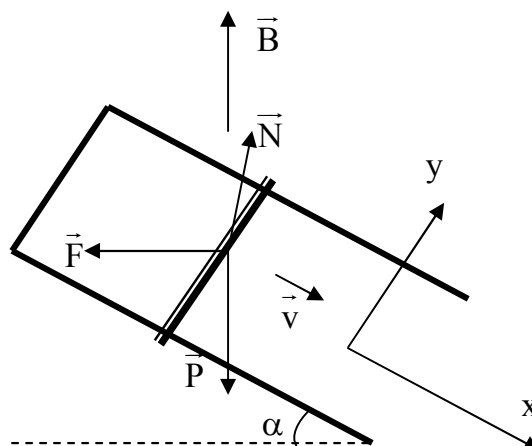
Lời Giải:

Khi thanh chuyển động với vận tốc v thì trong thanh xuất hiện suất điện động cảm ứng

$$\text{bằng } \xi = Bv \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = Bvl \cos \alpha.$$

Do đó, trong mạch có dòng điện

$$I = \frac{Bvl \cos \alpha}{R}$$



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Thanh chịu tác dụng của lực Ampe từ phía từ trường đều thẳng đứng bằng

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R} \text{ và có hướng nằm ngang chống lại sự chuyển động của thanh}$$

(Theo định luật Lenz).

Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động ổn định của thanh và chiếu lên các trục Ox và Oy có dạng sau

$$mg \sin \alpha - F \cos \alpha - F_{ms} = 0 \text{ với } F_{ms} = \mu \cdot N$$

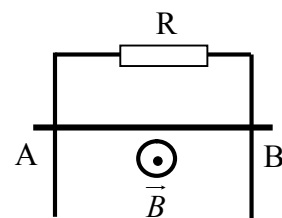
$$N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha = 0$$

$$\text{Giải các phương trình trên ta được: } v = \frac{mgR}{B^2 l \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 2 \text{ m/s}$$

Bài toán 33: Hai thanh kim loại song song, thẳng đứng có điện trở không đáng kể, một đầu nối vào điện trở $R = 0,5\Omega$.

Một đoạn dây dẫn AB, độ dài $l = 14\text{cm}$, khối lượng $m = 2\text{g}$, điện trở $r = 0,5\Omega$ tì vào hai thanh kim loại tự do trượt không

ma sát xuống dưới và luôn luôn vuông góc với hai thanh kim loại đó. Toàn bộ hệ thống đặt trong một từ trường đều có hướng vuông góc với mặt phẳng hai thanh kim loại có cảm ứng từ $B = 0,2\text{T}$. Lấy $g = 9,8\text{m/s}^2$.



a) Xác định chiều dòng điện qua R.

b) Chứng minh rằng lúc đầu thanh AB chuyển động nhanh dần, sau một thời gian chuyển động trở thành chuyển động đều. Tính vận tốc chuyển động đều ấy và tính U_{AB} .

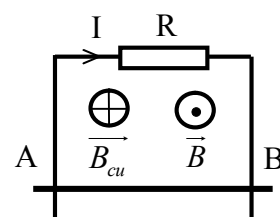
c) Bây giờ đặt hai thanh kim loại nghiêng với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 60^\circ$. Độ lớn và chiều của \vec{B} vẫn như cũ. Tính vận tốc v của chuyển động đều của thanh AB và U_{AB} .

Lời Giải:

a) Do thanh đi xuống nên từ thông qua mạch tăng.

Áp dụng định luật Lenz, dòng điện cảm ứng sinh ra \vec{B}_{cu} ngược chiều \vec{B} .

Áp dụng qui tắc nắm bàn tay phải, I chạy qua R có chiều từ A đến B.



b) Ngay sau khi buông thì thanh AB chỉ chịu tác dụng của trọng lực $P = mg$ nên thanh chuyển động nhanh dần, do đó v tăng dần.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

- Đồng thời, do sau đó trong mạch xuất hiện dòng điện I nên thanh AB chịu thêm tác dụng của lực từ $F = BIl$ có hướng đi lên.

- Mặt khác, suất điện động xuất hiện trong AB là:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv \text{ nên } I = \frac{e}{R+r} = \frac{Blv}{R+r} \rightarrow F = \frac{B^2 l^2 v}{R+r}$$

Cho nên khi v tăng dần thì F tăng dần, vì vậy tồn tại thời điểm mà $F = P$. Khi đó thanh chuyển động thẳng đều.

- Khi thanh chuyển động đều thì:

$$F = mg \rightarrow \frac{B^2 l^2 v}{R+r} = mg \rightarrow v = \frac{(R+r)mg}{B^2 l^2} = \frac{(0,5+0,5) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{0,2^2 \cdot 0,14^2} = 25(m/s)$$

- Hiệu điện thế giữa hai đầu thanh khi đó là:

$$U_{AB} = I \cdot R = \frac{Blv}{R+r} \cdot R = \frac{0,2 \cdot 0,14 \cdot 25}{0,5+0,5} \cdot 0,5 = 0,35(V)$$

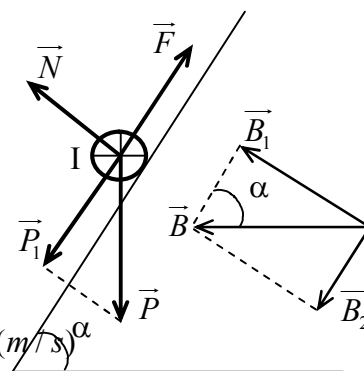
c) Khi để nghiêng hai thanh kim loại ta có hình vẽ bên:

- Hiện tượng xảy ra tương tự như trường hợp b) khi ta thay P bằng $P \sin \alpha$, thay B bằng B_1 với $B_1 = B \sin \alpha$.

- Lập luận tương tự ta có:

$$F = mg \sin \alpha \rightarrow \frac{(B \sin \alpha)^2 l^2 v}{R+r} = mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow v = \frac{(R+r)mg \sin \alpha}{(B \sin \alpha)^2 l^2} = \frac{(0,5+0,5) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot \sin 60^\circ}{(0,2 \cdot \sin 60^\circ)^2 \cdot 0,14^2} = 28,87(m/s)$$



- Hiệu điện thế giữa hai đầu thanh khi đó là:

$$U_{AB} = I \cdot R = \frac{B \sin \alpha \cdot lv}{R+r} \cdot R = \frac{0,2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,14 \cdot 28,87}{0,5+0,5} \cdot 0,5 = 0,35(V)$$

4.6 Dao động cơ học

Trước tiên ta xét bài toán “trung gian” giữa động lực học và dao động cơ học.

Bài toán 34: Một vật nhỏ khối lượng m trượt từ đỉnh cao nhất trên mặt nghiêng của nêm đứng yên trên một mặt bàn ráp. Mặt nghiêng của nêm lập với mặt phẳng ngang một góc α và gồm hai phần, mỗi phần có chiều dài L : phần trên cùng có hệ số ma sát biến thiên theo quy luật: $\mu = \frac{x}{L} \tan \alpha$ (trục x hướng dọc theo mặt phẳng nghiêng của

nêm với góc tại đỉnh nêm); phần dưới cùng có hệ số ma sát $\mu_1 = \tan \alpha$. Bỏ qua sự

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

chuyển động của nêm. Vận tốc ban đầu của vật bằng không. Tìm thời gian vật chuyển động trên mỗi phần của nêm, lực ma sát tác dụng lên nêm.

Lời Giải:

+ Trong miền thứ nhất, phương trình chuyển động của hạt là:

$$mx'' = mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \frac{x}{L} \tan \alpha$$

$$\Leftrightarrow (x - L)'' + \frac{g \sin \alpha}{L} (x - L) = 0$$

Giải phương trình vi phân này và sử dụng điều kiện ban đầu ta tìm được:

$$x = L(1 - \cos \omega t) \text{ với } \omega^2 = \frac{g \sin \alpha}{L}$$

Lực ma sát của bàn lên nêm: $F = \mu N \cos \alpha - N \sin \alpha = -mg \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \omega t$

Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}$ hạt bắt đầu chuyển sang miền 2.

+ Sang miền 2, vật chuyển động đều với vận tốc $v = L\omega$ và đi hết miền 2 trong thời

$$\text{gian } t = \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}$$

Lực ma sát do mặt bàn tác dụng lên nêm bằng 0.

Bài toán dưới đây mặc dù không có quá trình lặp đi lặp lại một cách tuần hoàn nào, nhưng lại có thể giải được bằng phương pháp của lý thuyết dao động điều hòa.

Bài toán 35: Một xích có chiều dài L trượt theo mặt phẳng nằm ngang với vận tốc v_0 rồi trượt lên mặt phẳng nghiêng góc α theo phương vuông góc với biên dưới của nó. Hỏi sau bao lâu thì xích sẽ dừng lại? Bỏ qua mọi ma sát

Lời Giải: Xét thời điểm khi một phần xích có chiều dài x và khối lượng $m(x) = \frac{m \cdot x}{L}$

đã đi lên mặt phẳng nghiêng.

Nếu viết phương trình của định luật II Newton cho mỗi yếu tố của xích theo hình chiếu trên phương chuyển động của nó, rồi sau đó lấy tổng các phương trình chuyển động của xích (ta bỏ đi nội lực tương tác giữa các phần tử của xích, vì theo định luật III Newton, khi lấy tổng chúng sẽ triệt tiêu nhau): $mx'' = -m(x) \cdot g \sin \alpha$

Phương trình này sẽ dẫn tới phương trình dao động điều hòa: $x'' + \frac{g \sin \alpha}{L} x = 0$

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẶNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Như vậy chuyển động của xích sẽ diễn ra theo quy luật dao động điều hòa với điều kiện ban đầu $x = 0$.

Vậy với $\omega = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$. Vận tốc của xích khi đó thay đổi theo quy luật:

$$v = \omega A \cos \omega t = v_0 \cos \omega t \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$$

Tùy thuộc vào điều kiện ban đầu mà có thể xảy ra 2 trường hợp.

+ Nếu $A < L$ thì chuyển động của xích trước khi dừng lại sẽ diễn ra theo quy luật điều hòa và trùng với chuyển động của con lắc. Thời gian đến khi dừng lại bằng một phần tư chu kỳ dao động:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}$$

+ Nếu $A > L$ thì xích sẽ đi trọn vẹn đi lên mặt phẳng nghiêng trước khi dừng lại, thời gian chuyển động cho tới khi dừng lại được tìm bằng cách sử dụng phương trình dao động của nó.

5. Giải pháp thực hiện

Qua những năm ôn thi đội tuyển HSG của trường dự thi các kỳ thi khác nhau, kinh nghiệm của cá nhân cho thấy, để học sinh có những kỹ năng cần thiết để giải bài toán về mặt phẳng nghiêng thì tôi thường thực hiện như sau:

Đầu tiên, hướng dẫn học sinh hiểu thật sâu kiến thức trong sách giáo khoa về phương pháp giải bài toán động lực học (sách giáo khoa trình bày khá kỹ). Yêu cầu học sinh giải và hiểu được tất cả các dạng bài tập động lực học trong sách giáo khoa, học sinh phải chứng minh được tất cả các công thức về các đại lượng liên quan đến chuyển động của các vật liên quan đến mặt phẳng nghiêng (gia tốc, lực căng dây, lực nén...).

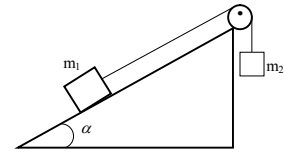
Sau khi học sinh đã hiểu sâu về những kiến thức cơ bản, tôi giải các bài tập mẫu (đã đề cập ở phần nội dung) với nhiều dạng bài tập khác nhau, đa dạng về các hướng tiếp cận, kết hợp các phương pháp giải khác nhau, dần dần giúp học sinh tiếp cận được các dạng bài tập từ cơ bản đến nâng cao.

Sau cùng, tôi cung cấp cho học sinh một hệ thống bài tập có đáp số để học sinh tự rèn luyện ở nhà, trong quá trình học sinh tự luyện thì giữa học sinh và giáo viên có sự trao đổi thường xuyên với nhau để giải đáp những thắc mắc kịp thời.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

6. BÀI TẬP THAM KHẢO CỦA CHUYÊN ĐỀ

Bài 1: Cho hệ vật như hình vẽ: $m_1 = 3\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $\alpha = 30^\circ$. Bỏ qua ma sát, khối lượng của dây và khối lượng ròng rọc. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



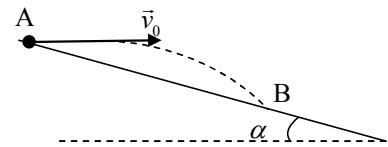
- Tính gia tốc chuyển động của mỗi vật
- Tính lực nén lên trục ròng rọc.
- Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên thì hai vật ở ngang. Biết lúc đầu m_1 ở vị trí thấp hơn m_2 $0,75\text{m}$.

ĐS: a. $a = 1\text{ m/s}$; b. $T = 31,2\text{ N}$; c. $t = 1\text{ s}$.

Bài 2: Muốn kéo một vật có trọng lượng $P = 1000\text{N}$ chuyển động đều lên một mặt phẳng nghiêng góc 60° so với đường thẳng đứng, người ta phải dùng một lực \vec{F} có phương song song với mặt phẳng nghiêng và có độ lớn 600N . Hỏi vật sẽ chuyển động xuống mặt phẳng nghiêng với gia tốc bao nhiêu khi không có lực \vec{F} . Biết giữa vật và mặt phẳng nghiêng có ma sát. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

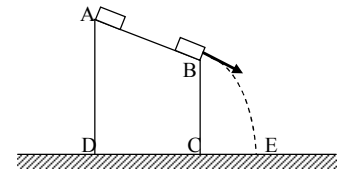
ĐS: $a = 4\text{ m/s}^2$.

Bài 3: Từ một điểm A trên sườn một quả đồi, một vật được ném theo phương nằm ngang với vận tốc 10m/s . Theo tiết diện thẳng đứng chứa phương ném thì sườn đồi là một đường thẳng nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương nằm ngang điểm rơi B của vật trên sườn đồi cách A bao nhiêu? Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



ĐS: $AB = 13,33\text{ m}$.

Bài 4: Từ đỉnh A của một mặt bàn phẳng nghiêng người ta thả một vật có khối lượng $m = 0,2\text{kg}$ trượt không ma sát không vận tốc đầu. Cho $AB = 50\text{cm}$; $BC = 100\text{cm}$; $AD = 130\text{cm}$; $g = 10\text{m/s}^2$.

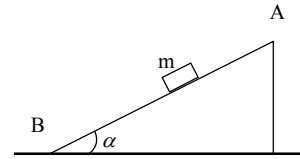


- Tính vận tốc của vật tại điểm B
- Chứng minh rằng quỹ đạo của vật sau khi rời khỏi bàn là 1 parabol. Vật rơi cách chân bàn một đoạn CE bằng bao nhiêu? (Lấy gốc tọa độ tại C)

ĐS: a. $v_B = 2,45\text{ m/s}$; b. $y = h - \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} x^2$, $CE = 0,635\text{ m}$.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

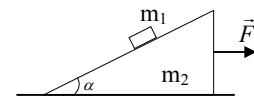
Bài 5: Nêm có khối lượng M , mặt AB dài l nghiêng một góc α so với phương ngang. Từ A thả vật khối lượng m không vận tốc đầu. Bỏ qua ma sát giữa m với sàn và giữa m với M .



- Tính gia tốc của M .
- Tìm thời gian m đi từ A đến B .

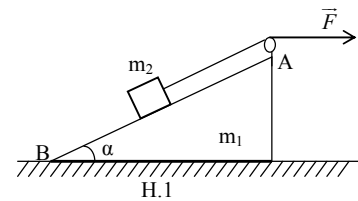
$$\text{ĐS: a. } a = \frac{mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}; \text{ b. } t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l(M + m \sin^2 \alpha)}{g \sin \alpha (M + m)}}.$$

Bài 6: Trên mặt phẳng nằm ngang có một nêm khối lượng $m_2 = 4\text{ kg}$, chiều dài mặt phẳng nghiêng $L = 12\text{ cm}$, và $\alpha = 30^\circ$. Trên nêm đặt khúc gỗ $m_1 = 1\text{ kg}$. Biết hệ số ma sát giữa gỗ và nêm $\mu = 0,1$. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt phẳng ngang. Tìm lực \vec{F} đặt vào nêm để khúc gỗ trượt hết chiều dài mặt phẳng nghiêng trong thời gian $t = 2\text{ s}$ từ trạng thái đứng yên. Lấy $g = 10\text{ m/s}^2$.



$$\text{ĐS: } F = 4,9\text{ N}.$$

Bài 7: Một nêm khối lượng $M = 1\text{ kg}$ có mặt AB dài 1 m , góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$ có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Từ A thả vật $m = 1\text{ kg}$ trượt xuống dốc AB . Hệ số ma sát trượt giữa m và mặt AB là $0,2$. Bỏ qua kích thước vật m . Tìm thời gian để m đến B . Trong thời gian đó nêm đi được đoạn đường bao nhiêu? Cho $g = 10\text{ m/s}^2$.

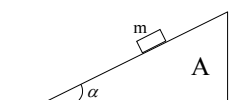


$$\text{ĐS: } t = 0,6\text{ s}; s = 0,43\text{ m}.$$

Bài 8: Chiếc nêm A có khối lượng $m_1 = 5\text{ kg}$, có góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$ có thể chuyển động tịnh tiến không ma sát trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Một vật khối lượng $m_2 = 1\text{ kg}$, đặt trên nêm được kéo bằng một sợi dây vắt qua ròng rọc cố định gắn chặt với nêm. Lực kéo F phải có độ lớn bằng bao nhiêu để vật m_2 chuyển động lên trên theo mặt nêm. Khi $F = 10\text{ N}$, gia tốc của vật và nêm bằng bao nhiêu? Bỏ qua ma sát, khối lượng dây và khối lượng ròng rọc. Lấy $g = 10\text{ m/s}^2$.

$$\text{ĐS: } 5,84 < F < 64,6\text{ N}; a_1 = 1,08\text{ m/s}^2; a_2 = 4,99\text{ m/s}^2.$$

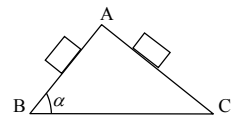
Bài 9: Nêm A phải chuyển động ngang với gia tốc bao nhiêu để m trên A chuyển động lên trên? Biết hệ số ma sát giữa m và A là $\mu < \cot \alpha$.



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

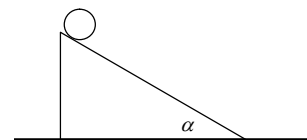
$$\text{ĐS: } a > \frac{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

Bài 10: Nêm có tiết diện là tam giác ABC vuông tại A. Nêm chuyển động trên mặt phẳng ngang với gia tốc \vec{a}_0 không đổi. Hai vật nhỏ cùng khối lượng, cùng trượt xuống từ đỉnh A dọc theo hai sườn AB và AC của nêm. Cho $\widehat{ABC} = \alpha$; ($\alpha > 45^\circ$). Tìm độ lớn và hướng gia tốc \vec{a}_0 của nêm theo α để hai vật cùng xuất phát từ đỉnh với vận tốc ban đầu bằng không (đối với nêm) và trượt đến chân các sườn trong các khoảng thời gian bằng nhau (bỏ qua mọi ma sát).



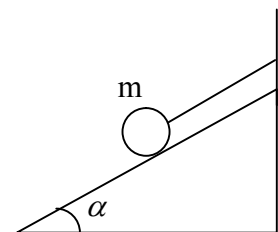
$$\text{ĐS: } a = \frac{g(\tan^2 \alpha - 1)}{2 \tan \alpha}; \text{ nêm chuyển động sang trái.}$$

Bài 11: Một cái nêm khối lượng M đang đứng yên trên mặt bàn nằm ngang. Trên mặt nghiêng của nêm hợp với mặt bàn một góc α , người ta đặt một quả cầu đồng chất khối lượng m. Quả cầu bắt đầu lăn không trượt dọc theo đường dốc chính của mặt nghiêng của nêm. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt bàn; ma sát lăn giữa quả cầu và nêm. Xác định gia tốc của nêm.



ĐS:

$$a_0 = \frac{\frac{5}{7} mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m(\sin^2 \alpha + \frac{2}{7} \cos^2 \alpha)}$$



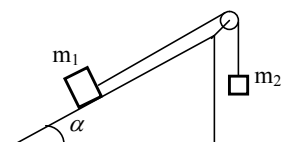
Bài 12: Một quả cầu đồng chất khối lượng $m = 3\text{kg}$, được giữ trên mặt phẳng nghiêng trơn nhờ một dây treo như hình vẽ. Cho $\alpha = 30^\circ$, lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

a. Tìm lực căng dây và lực nén của quả cầu lên mặt phẳng nghiêng.

b. Khi dây treo hợp với phương đứng một góc β thì lực căng dây là $10\sqrt{3}\text{ N}$. Hãy xác định góc β và lực nén của quả cầu lên mặt phẳng nghiêng lúc này.

$$\text{ĐS: a. } T = 15\text{ N}; \text{ b. } N = 15\sqrt{3}\text{ N.}$$

Bài 13: Hai vật m_1 và m_2 được nối với nhau qua ròng rọc như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa vật m_1 và mặt phẳng nghiêng là μ . Bỏ qua khối lượng ròng rọc và dây nối. Dây nối không co giãn.



XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

Tính tỉ số giữa m_2 và m_1 để vật m_1 :

- Đi lên thẳng đều.
- Đi xuống thẳng đều

ĐS: a. $\frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha + \mu \cos \alpha$; b. $\frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha - \mu \cos \alpha$;

Bài 14: Một vật có khối lượng $m = 20\text{kg}$ nằm trên một mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang.

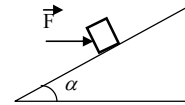
1. Bỏ qua ma sát, muốn giữ vật cân bằng cần phải đặt phải đặt vào vật một lực F bằng bao nhiêu trong trường hợp:

- Lực \vec{F} song song với mặt phẳng nghiêng.
- Lực \vec{F} song song với mặt phẳng nằm ngang

2. Giả sử hệ số ma sát của vật với mặt phẳng nghiêng là $k = 0,1$ và lực kéo \vec{F} song song với mặt phẳng nghiêng. Tìm độ lớn F khi vật được kéo lên đều và khi vật đứng yên trên mặt phẳng nghiêng. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

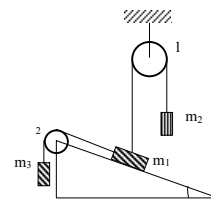
ĐS: 1. a. $F = 100\text{ N}$, b. $F = 115,47\text{ N}$; 2. $F = 117,32\text{ N}$.

Bài 15: Một vật có trọng lượng $P = 100\text{N}$ được giữ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng góc α bằng lực \vec{F} có phương nằm ngang như hình vẽ. Biết hệ số ma sát $\mu = 0,2$. Tính giá trị lực F lớn nhất và bé nhất. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



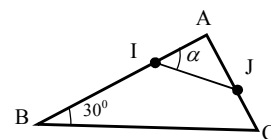
ĐS: $F_{max} = 77,77\text{ N}$; $F_{min} = 27,27\text{ N}$.

Bài 16: Người ta giữ cân bằng vật $m_1 = 6\text{kg}$, đặt trên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với mặt ngang bằng cách buộc vào m_1 hai sợi dây vắt qua ròng rọc 1 và 2, đầu kia của hai sợi dây treo hai vật có khối lượng $m_2 = 4\text{kg}$ và m_3 (hình). Tính khối lượng m_3 của vật và lực nén của vật m_1 lên mặt phẳng nghiêng. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Bỏ qua ma sát.



ĐS: $m_3 = 1\text{ kg}$; $N = 17,32\text{ N}$.

Bài 17: Một khung kim loại ABC với $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, BC nằm ngang, khung nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Có hai viên bi giống hệt nhau trượt dễ dàng trên hai thanh AB và AC. Hai thanh viên bi này nối với nhau bằng thanh nhẹ IJ. Khi thanh cân bằng thì $\hat{A}IJ = \alpha$

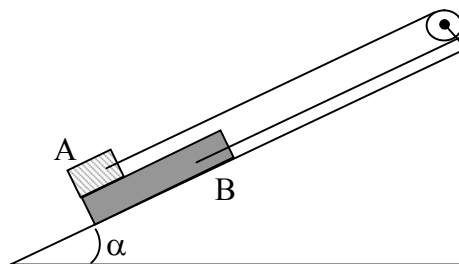


a. Tính α ?

b. Cân bằng trên là bền hay không bền

ĐS: $\alpha = 60^\circ$; Cân bằng bền.

Bài 18 (Đề Olympic 30/4 năm 2009): Một tấm ván B dài $\ell = 1\text{m}$, khối lượng $m_2 = 1\text{kg}$ được đặt lên một mặt phẳng nghiêng 30° so với phương ngang. Một vật A có khối lượng $m_1 = 100\text{g}$ được đặt tại điểm thấp nhất của B và được nối với B bằng một sợi dây mảnh không giãn vắt qua một ròng rọc nhẹ, gắn cố định ở đỉnh dốc. Cho $g = 10\text{m/s}^2$ và bỏ qua mọi ma sát. Thả cho tấm ván trượt xuống dốc.



a. Tìm gia tốc của A, B. Tính lực do B tác dụng lên A, lực do mặt nghiêng tác dụng lên B và lực căng của dây nối.

b. Tính thời gian để A rời khỏi ván B.

ĐS: a. $T = 0,9\text{ N}$; b. $t = 0,49\text{ s}$

Bài 19: Một khung kim loại đặt nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 30^\circ$ và được đặt trong một từ trường đều có phương thẳng đứng. Một thanh trượt có khối lượng $m = 30\text{ gam}$ bắt đầu trượt không ma sát theo khung. Biết độ dài thanh trượt là $l = 10\text{ cm}$, điện trở của thanh là $R = 2\ \Omega$; cảm ứng từ $B = 0,1\text{ T}$; hệ số ma sát giữa thanh trượt và khung là $\mu = 0,5$. Tìm vận tốc đã ổn định của thanh trượt. Bỏ qua điện trở của khung.

ĐS: $v = 3\text{ m/s}$.

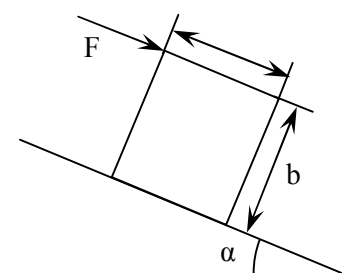
Bài 20: Một thanh MN đồng chất tiết diện đều có chiều dài $l = 1\text{ m}$, đặt dọc theo mặt phẳng nghiêng AC có chiều dài $3,5l$; Mặt nghiêng của nêm lậ với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Ban đầu thì đầu M tại A, trên đoạn $AB = 1,5l$ của mặt phẳng nghiêng không có ma sát, đoạn BC tiếp theo có ma sát với hệ số ma sát $\mu = \tan\alpha$. Bỏ qua sự chuyển động của nêm. Vận tốc ban đầu của vật bằng không. Lấy $g = 10\text{ m/s}^2$.

a. Tìm vận tốc của thanh khi đầu dưới N đến chân mặt phẳng nghiêng

b. Tìm thời gian chuyển động của thanh trong quá trình trên.

ĐS: a. $\sqrt{10}\text{ m/s}$; b. $1,11\text{ s}$

Bài 21: Vật khối lượng m có kích thước $a \times b$ nằm trên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α . Bắt đầu tác dụng lực F song song với mặt phẳng nghiêng. Với lực F như thế nào thì vật bị lật đổ? Biết rằng khi đó vật không bị trượt xuống mặt

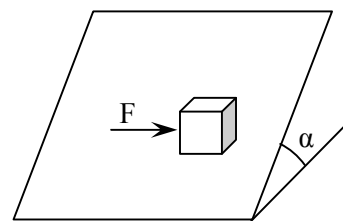


XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

phẳng nghiêng.

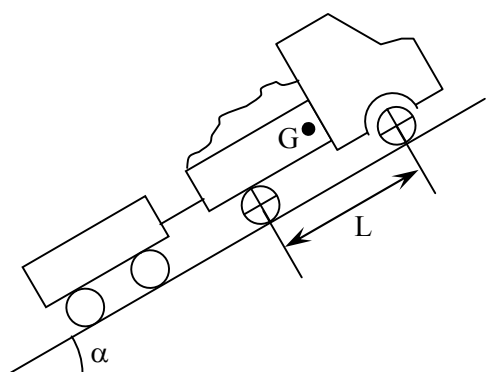
$$\text{ĐS: } F \geq \frac{mg}{2} \left(\frac{a}{b} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \right)$$

Bài 22: Một khối lập phương nhỏ khối lượng $m = 100\text{g}$ đặt trên mặt phẳng nhám nghiêng với phương nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$ (Hình 1.16). Hệ số ma sát giữa khối lập phương và mặt nhám là $k = 0,8$. Tìm lực nhỏ nhất F tác dụng vào khối lập phương theo phương ngang để cho nó bắt đầu chuyển động? Lực nằm trên mặt phẳng nghiêng.



$$\text{ĐS: } F_{\min} = mg \cdot \sqrt{(k \cdot \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha}$$

Bài 23: Xe tải có khối lượng $M = 8$ tấn đang vượt dốc. Xe tải kéo theo một móc có khối lượng $m = 4$ tấn. Dây nối nằm ở độ cao $h = 1\text{m}$. Khối tâm G của xe tải nằm ở độ cao $H = 2\text{m}$; khoảng cách giữa các trục bánh xe là $L = 4\text{m}$. Khi đi trên đường nằm ngang thì các bánh sau ép lên mặt đường một lực bằng $\frac{3}{4}$ toàn bộ trọng



lượng của xe. Với góc nghiêng của dốc như thế nào thì xe bị đổ về sau? Thực tế có nguy hiểm hay không, nếu công suất của động cơ chỉ đủ để vượt dốc có góc nghiêng không vượt quá 10° ?

$$\text{ĐS: } \tan \alpha \geq \frac{M \frac{L}{4}}{m \cdot h + M \cdot H}$$

Bài 24 (Trích đề thi chọn HSG QG năm 2013): Một quả cầu đặc, đồng chất, khối lượng m , bán kính r , lúc đầu được giữ đứng yên và không quay, tâm ở độ cao nào đó so với mặt sàn nằm ngang. Trên sàn có một vật hình nêm khối lượng M , mặt nêm nghiêng góc α so với phương nằm ngang. Thả cho quả cầu rơi tự do xuống nêm. Biết rằng ngay trước khi va chạm vào mặt nêm tâm quả cầu có vận tốc v_0 . Coi quả cầu và nêm là các vật rắn tuyệt đối. Bỏ qua tác dụng của trọng lực trong thời gian va chạm.

Sau va chạm nêm chỉ dịch chuyển tịnh tiến trên mặt sàn. Bỏ qua ma sát. Coi va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

a) Tìm tốc độ dịch chuyển của nêm ngay sau va chạm.

XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP MẶT PHẪNG NGHIÊNG BỒI DƯỠNG HSG

b) Với α bằng bao nhiêu thì động năng của ném thu được ngay sau va chạm là lớn nhất? Tìm biểu thức động năng lớn nhất đó.

$$\text{ĐS: a. } v = \frac{m}{M} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M(1+K^2)}}}; K = \frac{1}{2} \left[\cot \alpha - \frac{1}{\cot \alpha} \left(1 + \frac{m}{M} \right) \right]; \text{ b. } \cot \alpha = \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

Bài 25 (Trích đề thi chọn HSG QG năm 2014): Đặt một vật nhỏ $m = 10$ gam trên một mặt phẳng, mặt phẳng này nghiêng với mặt phẳng ngang góc $\alpha = 30^\circ$. Vật được nối vào điểm O cố định trên mặt nghiêng nhờ một dây mảnh, nhẹ, không dẫn có chiều dài $R = 40$ cm. Ban đầu vật được giữ cố định trên mặt nghiêng ở vị trí dây nối nằm ngang rồi được thả nhẹ cho chuyển động. Vật đổi chiều chuyển động lần đầu tiên khi dây quay được góc 120° so với vị trí ban đầu. Trong suốt quá trình chuyển động dây luôn căng. Lực ma sát có phương tiếp tuyến với quỹ đạo và có chiều ngược với chiều chuyển động. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1. Tính hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng.
2. Tính độ lớn vận tốc cực đại và lực căng dây cực đại trong quá trình vật chuyển động.
3. Tính tổng quãng đường vật đi được từ lúc thả đến khi vật dừng lại hẳn.

$$\text{ĐS: 1. } \mu = \frac{3}{4\pi}; \text{ 2. } T_{\max} = 0,091 \text{ N}; \text{ 3. } S = 0,915 \text{ m}$$

7. Tài liệu tham khảo

- [1] VŨ THANH KHIẾT, 121 BÀI TẬP VẬT LÝ 10 NÂNG CAO, NXB ĐỒNG NAI, 1998
- [2] BÙI QUANG HÂN (chủ biên), GIẢI TOÁN VẬT LÝ 10, NXB GIÁO DỤC, 2003
- [3] BÙI QUANG HÂN (chủ biên), GIẢI TOÁN VẬT LÝ 11, NXB GIÁO DỤC, 2003
- [4] BÙI QUANG HÂN (chủ biên), GIẢI TOÁN VẬT LÝ 12, NXB GIÁO DỤC, 2003
- [5] NGUYỄN ANH THI, 252 BÀI TOÁN CƠ HỌC, NXB GIÁO DỤC, 2005
- [6] TẠP CHÍ VẬT LÝ TUỔI TRẺ.